Aufgabe 15: Berechnen Sie die ersten Ableitungen:

a) $p(x) = x^4 - 9x^2 + 4x + 12$, b) $q(u) = (u^2 - 5)^8$,
c) $r(z) = \frac{\sqrt{z^2-1}}{\sqrt{z^2+1}}$, d) $e_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

LÖSUNG:

a)

$$p'(x) = 4x^3 - 18x + 4$$

Denn: $(x^n)' = nx^{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und differenzierbare Funktionen f und g.

b)

$$q'(x) = [(x^2-5)^8]' = 8(x^2-5)^7 \cdot 2x = 16x(x^2-5)^7$$

nach der Kettenregel: $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ und den Regeln in a)!

c)

$$\begin{aligned}
r'(x) = \left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}}\right)' &= \frac{\left(\sqrt{x^2-1}\right)'\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{x^2+1} \quad \text{(Quotientenregel!)} \\
&= \frac{1}{x^2+1} \cdot \left\{\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \cdot \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right\} \\
&= \frac{1}{x^2+1} \cdot \frac{x \cdot (x^2+1) - (x^2-1) \cdot x}{\sqrt{x^2-1}\sqrt{x^2+1}} \\
&= \frac{x^3 + x - x^3 + x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}\sqrt{x^2-1}} \\
&= \frac{2x}{(x^2+1)^{3/2}\sqrt{x^2-1}} .
\end{aligned}$$

Benutzt:

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{x^2-1}\right)' &= \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} , \quad \text{(Kettenregel!)} \\
\left(\sqrt{x^2+1}\right)' &= \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} , \\
\left(\sqrt{x}\right)' &= \frac{1}{2\sqrt{x}} .
\end{aligned}$$

<u>Beachte:</u> $\sqrt{x^2-1}$ ist nur definiert für $x^2 - 1 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 \geq 1 \;\Leftrightarrow\; |x| \geq 1 \;\Leftrightarrow$ $x \geq 1$ oder $x \leq -1$.
Beim Ableiten „gerät“ $\sqrt{x^2-1}$ in den Nenner: $\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}}\right)' = \frac{2x}{(x^2+1)^{3/2}\sqrt{x^2-1}}$, also alles „richtig“ für $|x| > 1 \;\Leftrightarrow x > 1$ oder $x < -1$

d)

$$
\begin{aligned}
e_n(x) &= \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \\
e_n'(x) &= n\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{n} \\
&= \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1} \\
&= \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{n}} \\
&= e_n(x)\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{n}}
\end{aligned}
$$

nach der Kettenregel!

<u>Bemerkung:</u> Später sehen wir:

$$e_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \to e^x \text{ für } n\to+\infty$$

Obige Formel legt also

$$(e^x)' = e^x$$

nahe, da $(1+\frac{x}{n}) \to 1$ für $n \to +\infty$ und $x \in \mathbb{R}$ beliebig, aber fest.

<u>Problem:</u> Gilt: $\lim_n e_n'(x) = (e^x)'$?

Vertauschen von zwei Grenzübergängen!

Aufgabe 16: a) Bestimmen Sie die drei lokalen Maxima und die zwei lokalen Minima der Funktion

$$W(x) = (x^2-1)^2$$

auf dem Intervall $[-2, 2]$.

b) Welche lokalen Extrema ergeben sich für die Funktion

$$f(x) = |x^2 - 2x| \ ?$$

Skizzieren Sie jeweils den Graphen der Funktion!

LÖSUNG:

a)

$$
\begin{aligned}
W(x) &= (x^2-1)^2 = x^4-2x^2+1 \geq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}\,. \\
W(\pm 1) &= (1-1)^2 = 0\ ! \\
W'(x) &= 2(x^2-1)\cdot 2x = 4x(x^2-1) = 4x(x-1)(x+1) \\
&= 4x^3-4x
\end{aligned}
$$

Nullstellen von W': $x=-1, x=0, x=+1$.

i)

$$W'(0) = 0\,.$$

$$0<h<1 \Rightarrow 0<h^2<1 \Rightarrow W'(h) = 4h(h^2-1) < 0$$

$$-1<h<0 \Rightarrow 0<h^2<1 \Rightarrow W'(h) = 4\underbrace{h}_{<0}\underbrace{(h^2-1)}_{<0} > 0$$

D.h. für $-1 < h < 0$ ist $W'(h) > 0$, d.h. Steigung der Tangente an den Graphen von W im Punkt $(h, W(h))$ ist positiv, $W'(h) = 0 \rightsquigarrow$ horizontale Tangente, dann $W'(h) < 0$ für $0 < h < 1 \rightsquigarrow$ Tangentensteigung negativ.

$\Rightarrow$ $W(0) = 1$ liefert lok. Maximum.

Entsprechend:

ii)

$$W'(\pm 1) = 0$$

$$\begin{aligned} W'(\pm 1 \pm h) &= 4(\pm 1 \pm h)((\pm 1 \pm h)^2 - 1) \\ &= 4(\pm 1 \pm h)(1 \pm 2h + h^2 - 1) \\ &= 4(\pm 1 \pm h)(h^2 \pm 2h) \\ &= 4(\pm 1 \pm h)h(h \pm 2) \end{aligned}$$

+ -Fall:

$$W'(1+h) = 4(1+h)h(h+2) > 0 \text{ für } h > 0$$

$$W'(1-h) = 4(1-h)h(h-2) < 0 \text{ für } 0 < h < 1\,!$$

– -Fall:

$$W'(-1+h) = 4(-1+h)h(h-2) = 4(h-1)h(h-2) > 0 \text{ für } 0 < h < 1$$

$$W'(-1-h) = 4(-1-h)h(h+2) = 4(-1)(1+h)h(h+2) < 0 \text{ für } 0 < h(< 1)\,!$$

$\Rightarrow$ $W(\pm 1) = 0$ liefern lok. Minima!

iii) Wegen $W(x) = x^4\left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right)$ gilt

$$W(x) \to +\infty \text{ für } x \to \pm\infty\,!$$

$$W(\pm 2) = (4-1)^2 = 3^2 = 9 \to \text{Maxima auf } [-2, 2]\,!$$

Beachte: $W(\pm 2) = 9$ sind Randextrema!

$$W'(2) = 4 \cdot 2 \cdot 3 = 24 > 0\,,\ W'(-2) = -24 < 0\,!$$

Alternativ kann man die Art der Extrema im Innern des Intervalls auch wie folgt bestimmen:

$$\begin{aligned} W(\pm 1) &= 0 \quad \text{(s.o.)} \\ W(0) &= 1 \\ W''(x) &= 12x^2 - 4 = 4(3x^2 - 1) \\ W''(\pm 1) &= 12 \cdot 1 - 4 = 8 > 0 \\ W''(0) &= -4 < 0 \\ W'(\pm 1) &= 0 \text{ und } W''(\pm 1) = 8 > 0 \;\Rightarrow\; \pm 1 \text{ liefert lok. Min. (Schule!)} \\ W'(0) &= 0 \text{ und } W''(0) = -4 < 0 \;\Rightarrow\; 0 \text{ liefert lok. Max.} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} f(x) &= |x^2 - 2x| \geq 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \\ &= |x(x-2)| \end{aligned}$$

$$\Rightarrow\; f(0) = 0 = f(2)$$

Erwarten: $x = 0\,,\ x = 2$ liefern Minima!
Um die Funktion $f(x)$ mit Fallunterscheidung zu schreiben, schauen wir uns die Ungleichung

$$x^2 - 2x \geq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x\,(x-2) \geq 0$$

an. Sie ist erfüllt in den folgenden beiden Fällen:

$$x \geq 0 \qquad \text{und} \qquad x \geq 2$$

und

$$x \leq 0 \qquad \text{und} \qquad x \leq 2,$$

d.h. in den Fällen $x \geq 2$ bzw. $x \leq 0$. Da diese beiden Fälle nicht ganz $\mathbb{R}$ abdecken müssen wir drei Fälle unterscheiden.

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{cl} x^2 - 2x = x(x-2) & \text{für } x \geq 2 \\ -x^2 + 2x = (-x)(x-2) & \text{für } 0 \leq x < 2 \\ x^2 - 2x = x(x-2) & \text{für } x < 0 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \ f'(x) = \left\{ \begin{array}{cl} 2x - 2 = 2(x-1) & \text{für } x > 2 \\ -2x + 2 = (-2)(x-1) & \text{für } 0 < x < 2 \\ 2x - 2 = 2(x-1) & \text{für } x < 0 \end{array} \right\}$$

<u>Problem:</u> f <u>nicht</u> differenzierbar in $x = 0\,,\ x = 2$ wegen Betrag!
Man erkennt aber: $f'(x) = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 1$

i) $f(1) = 1$

$$\begin{array}{ll} f'(1) = 0\,, & f'(1+h) = (-2)h < 0 \text{ für } h > 0 \\ & f'(1-h) = (-2)(-h) = 2h > 0 \text{ für } 0 < h < 1 \end{array}$$

$\Rightarrow \ f(1) = 1$ lok. Max.

ii) $f(0) = 0$

$$\begin{array}{rl} 0 < h < 1 & f(h) = |h(h-2)| = (-h)(h-2) \\ & f'(h) = (-2)(h-1) > 0 \\ -1 < h < 0 & f(h) = h(h-2) \\ & f'(h) = 2(h-1) < 0 \end{array}$$

$\Rightarrow \ f(0) = 0$ lok. Min.

iii) $f(2) = 0$

$$\begin{array}{ll} 0 < h < 1 & f'(2+h) = 2(2+h-1) = 2(1+h) > 0 \\ & f'(2-h) = (-2)(2-h-1) = \underbrace{(-2)}_{<0}\underbrace{(1-h)}_{>0} < 0 \end{array}$$

$\Rightarrow \ f(2) = 0$ lok. Min.
Wegen $f(x) = |x^2 - 2x| = x^2|1 - \frac{2}{x}| \to +\infty$ für $x \to \pm\infty$ gilt:

$$\begin{array}{rcl} x > 2 & : & f(x) = x^2 - 2x \ \rightsquigarrow \ \text{Parabel} \\ 0 \leq x \leq 2 & : & f(x) = -x^2 + 2x \ \rightsquigarrow \ \text{Parabel} \\ x < 0 & : & f(x) = x^2 - 2x \ \rightsquigarrow \ \text{Parabel} \end{array}$$

<u>Beachte:</u> f' springt bei $x = 0$ von -2 auf 2 und bei $x = 2$ ebenfalls von -2 auf 2.

Aufgabe 17: Die Sinus-Funktion ist gegeben durch die Reihe

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Beweisen Sie, dass diese Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert. Benutzen Sie für den Beweis das Quotientenkriterium.

Lösung: Zuerst nennen wir die Summanden a_n, so dass sich die Reihe schreiben läßt als

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Da die Voraussetzung für das Quotientenkriterium fordert, dass $a_n \neq 0$ für $n \geq N$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ müssen wir zwei Fälle unterscheiden:

i) Fall $x = 0$: Da

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{0^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0$$

ist die Konvergenz der Reihe in diesem Fall kein Problem.

ii) Fall $x \neq 0$:
In diesem Fall gilt grundsätzlich $a_n \neq 0$. Des Weiteren gilt

$$\begin{aligned}
\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \frac{\left|(-1)^{n+1} \frac{x^{2(n+1)+1}}{(2n+1)!}\right|}{\left|(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right|} \\
&= \left|\frac{x^{2n+3}(2n+1)!}{(2n+3)!\, x^{2n+1}}\right| \\
&= \left|\frac{x^2}{(2n+2)(2n+3)}\right| \\
&= \left|\frac{x^2}{4n^2+10n+6}\right| \\
&\leq \left|\frac{x^2}{4n^2}\right| \\
&\leq \frac{1}{4} \qquad \text{für} \qquad n \geq x
\end{aligned}$$

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ läßt sich also ein $n \in \mathbb{N}_0$ finden, für das

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq \frac{1}{4} \qquad \text{für} \qquad n \geq x$$

gilt. Damit konvergiert die Reihe nach dem Quotientenkriterium.

Aufgabe 18: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, d.h. die Funktion f selber ist differenzierbar und ihre erste Ableitung f' stetig. Welche Aussagen sind richtig?

a) Gilt $f'(x) > 0$ für alle x, dann hat f an der Stelle $x = a$ ein Minimum.

b) Ist f streng monoton wachsend, dann gilt für alle x die Ungleichung $f'(x) > 0$.

c) Hat f ein Minimum an der Stelle x_0 mit $a < x_0 < b$, dann gilt $f'(x_0) = 0$.

d) Hat f ein Minimum an der Stelle $x_0 \in [a, b]$, dann gilt $f'(x_0) = 0$.

e) Wenn $f(a) = f(b)$ gilt, dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

f) Wenn $f(a) = f(b)$ gilt, so ist f entweder konstant oder es gibt ein $\xi \in (a, b)$, so dass f an der Stelle ξ ein Maximum oder ein Minimum hat.

LÖSUNG:

a) Ja!
$f'(x) > 0$ für alle $x \in [a, b] \quad \Rightarrow$ f ist streng monoton wachsend $\Rightarrow$ Beh.

b) Nein!
$f(x) = x^3$ ist auf $[-1, 1]$ streng monoton wachsend, aber $f'(0) = 0$ ($f'(x) \geq 0$ folgt aus dem Mittelwertsatz, jedoch nicht $f'(x) > 0$)

c) Ja!
siehe Vorlesung.

d) Nein!
siehe a): x_0 könnte a oder b sein.

e) Ja!
Satz von Rolle.

f) Ja!
Vgl. Beweis zum Satz von Rolle.