Aufgabe 19: Betrachten Sie die folgende gewöhnliche Differentialgleichung:

$$y''(x) + 4\,y'(x) + 5\,y(x) = \cos(3x)$$

Zeigen Sie, dass

$$y(x) = e^{-2x}\left[c_1\cos(x) + c_2\sin(x)\right] + \frac{3}{40}\sin(3x) - \frac{1}{40}\cos(3x)$$

eine Lösung dieser Differentialgleichung ist. Hierbei sind c_1 und c_2 zwei beliebige Konstanten aus $\mathbb{R}$.

Lösung: Zunächst sind die erste und die zweite Ableitung auszurechnen.

$$\begin{aligned}
y(x) &= e^{-2x}\left[c_1\cos(x) + c_2\sin(x)\right] + \frac{3}{40}\sin(3x) - \frac{1}{40}\cos(3x)\\
y'(x) &= e^{-2x}(-2)\left[c_1\cos(x) + c_2\sin(x)\right] + e^{-2x}\left[-c_1\sin(x) + c_2\cos(x)\right]\\
&\quad + \frac{3}{40}\cos(3x)3 + \frac{1}{40}\sin(3x)3\\
y''(x) &= e^{-2x}4\left[c_1\cos(x) + c_2\sin(x)\right] + e^{-2x}4\left[-c_1\sin(x) + c_2\cos(x)\right]\\
&\quad + e^{-2x}(-2)\left[-c_1\sin(x) + c_2\cos(x)\right] + e^{-2x}\left[-c_1\cos(x) - c_2\sin(x)\right]\\
&\quad - \frac{3}{40}\cos(3x)9 + \frac{1}{40}\sin(3x)9
\end{aligned}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
y''(x) + 4\,y'(x) + 5\,y(x) = e^{-2x}\big[&4c_1\cos(x) + 4c_2\sin(x) + 2c_1\sin(x) - 2c_2\cos(x)\\
&+ 2c_1\sin(x) - 2c_2\cos(x) - c_1\cos(x) - c_2\sin(x)\\
&- 8c_1\cos(x) - 8c_2\sin(x) - 4c_1\sin(x) + 4c_2\cos(x)\\
&+ 5c_1\cos(x) + 5c_2\sin(x)\big]\\
&+ \sin(3x)\left[-\frac{27}{40} + \frac{12}{40} + \frac{15}{40}\right] + \cos(3x)\left[\frac{9}{40} + \frac{36}{40} - \frac{5}{40}\right]\\
= \;&\cos(3x) \quad \checkmark
\end{aligned}$$

Aufgabe 20: Die Funktionen $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$ seien stetig differenzierbar. Zeigen Sie durch vollständige Induktion die Formel (Produktregel für n - Faktoren):

$$\begin{aligned}
(f_1\cdot f_2\cdot f_3\cdot\dots\cdot f_n)' \;=\;& f_1'\cdot f_2\cdot f_3\cdot\dots\cdot f_n\\
&+ f_1\cdot f_2'\cdot f_3\cdot\dots\cdot f_n + \dots\\
&+ f_1\cdot f_2\cdot f_3\cdot\dots\cdot f_{n-1}\cdot f_n'\,.
\end{aligned}$$

Tipp: Wie lautet die Formel für $n = 3$ und wie kann sie auf den Fall $n = 2$ zurückführen? Der Induktionsschritt im allgemeinen Fall läßt sich dann entsprechend durchführen.

Lösung: (IA): $n = 2$:

$$(f_1\cdot f_2)' = f_1'\cdot f_2 + f_1\cdot f_2' \quad \text{Produktregel!} \to \text{Vorlesung/Skript!}$$

Zwischenbemerkung (nach Tipp): $n = 3$:

$$(f_1\cdot f_2\cdot f_3)' = f_1'\cdot f_2\cdot f_3 + f_1\cdot f_2'\cdot f_3 + f_1\cdot f_2\cdot f_3'$$

Beweis: Setze: $f_1 \cdot f_2 =: g$

$$\begin{aligned} \Rightarrow\ (f_1 \cdot f_2 \cdot f_3)' &= (g \cdot f_3)' \\ &= g' \cdot f_3 + g \cdot f_3' \quad \text{(Produktregel!)} \\ &= (f_1 \cdot f_2)' \cdot f_3 + f_1 \cdot f_2 \cdot f_3' \\ &= (f_1' \cdot f_2 + f_1 \cdot f_2') \cdot f_3 + f_1 \cdot f_2 \cdot f_3' \quad \text{(Produktregel!)} \\ &= f_1' \cdot f_2 \cdot f_3 + f_1 \cdot f_2' \cdot f_3 + f_1 \cdot f_2 \cdot f_3' \quad \checkmark \end{aligned}$$

(IAn): Formel ok. für $n \in \mathbb{N}$:

$$(f_1 \cdot \ldots \cdot f_n)' = f_1' \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n + \ldots + f_1 \cdot \ldots \cdot f_{n-1} \cdot f_n'$$

(IS): $n \rightsquigarrow n+1$:
Beh.:

$$(f_1 \cdot \ldots \cdot f_n \cdot f_{n+1})' = f_1' \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n \cdot f_{n+1} + \ldots + f_1 \cdot \ldots \cdot f_n \cdot f_{n+1}'$$

Beweis: $g := f_1 \cdot \ldots \cdot f_n$

$$\begin{aligned} (f_1 \cdot \ldots \cdot f_n \cdot f_{n+1})' &= (g \cdot f_{n+1})' \\ &= g' \cdot f_{n+1} + g \cdot f_{n+1}' \quad \text{(Produktregel!)} \\ &= (f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n)' \cdot f_{n+1} + f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n \cdot f_{n+1}' \\ &= (f_1' \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n + \ldots + f_1 \cdot \ldots \cdot f_{n-1} \cdot f_n') \cdot f_{n+1} + f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n \cdot f_{n+1}' \\ &= f_1' \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n \cdot f_{n+1} \\ &+ f_1 \cdot f_2' \cdot f_3 \cdot f_n \cdot f_{n+1} + \ldots \\ &+ f_1 \cdot \ldots \cdot f_n' \cdot f_{n+1} \\ &+ f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n \cdot f_{n+1}' \quad \checkmark \quad \text{q.e.d} \end{aligned}$$

Folgerungen:

a) $(f^n(x))' = n \cdot f^{(n-1)}(x) \cdot f'(x)$.
$(f_1(x) = f_2(x) = \ldots = f_n(x) = f(x))$

b) $(x^n)' = nx^{n-1}$
$(f(x) = x\,,\ f'(x) = 1\,)$

Aufgabe 21: Die an den Graphen der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$ im Punkt $\big(x_0, f(x_0)\big)$ gelegte Tangente bildet mit den Koordinatenachsen ein Dreieck. Man zeige, dass der Flächeninhalt des Dreiecks unabhängig von der Wahl von x_0 ist und gebe diesen konstanten Wert des Flächeninhalts an!

Lösung:

- Lösungsidee: Katheten des rechtwinkligen Dreiecks = Achsenabschnitte x_A, y_A
- Tangentengleichung: $y = t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = \dfrac{1}{x_0} - \dfrac{1}{x_0^2}(x - x_0) = \dfrac{2}{x_0} - \dfrac{x}{x_0^2}$
- Tangente schneidet y-Achse in $(0, y_A)$ mit $y_A = t(0) = \dfrac{2}{x_0} - \dfrac{0}{x_0^2} = \dfrac{2}{x_0}$
- Tangente schneidet x-Achse in $(x_A, 0)$ mit $0 = t(x_A) = \dfrac{2}{x_0} - \dfrac{x_A}{x_0^2} \Longrightarrow x_A = 2x_0$

- $\Longrightarrow$ Flächeninhalt $= \frac{1}{2} x_A y_A = \frac{1}{2} \cdot 2x_0 \cdot \frac{2}{x_0} = 2 \equiv$ const.

Aufgabe 22: Zeigen Sie, daß für die Funktionen

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad \text{und} \quad \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

gilt:

a) $(\cosh x)' = \sinh x$, b) $(\sinh x)' = \cosh x$,
c) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Tipp(zu c)): Erinnern Sie sich hierzu an die Herleitung der Formel $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$!

LÖSUNG:

a)

$$(\cosh x)' = \left(\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\right)' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x} \cdot (-1)) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh x$$

Ableitung mit Kettenregel und $(e^x)' = e^x$

b)

$$(\sinh x)' = \left(\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\right)' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x} \cdot (-1)) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh x$$

Ableitung mit Kettenregel und $(e^x)' = e^x$

c)

$$f(x) := \cosh^2 x - \sinh^2 x\,,\ f(0) = 1\,,\ \text{da}$$

$$\cosh 0 = \frac{1}{2}(e^0 + e^{-0}) = \frac{1}{2}(1+1) = 1\,,\ \sinh 0 = \frac{1}{2}(e^0 - e^{-0}) = 0\,.$$

$$f'(x) \overset{a),b)}{=} 2\cosh x \cdot \sinh x - 2\sinh x \cosh x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

$$\Rightarrow\ f(x) = \text{const} \quad \forall x \in \mathbb{R} \ \Rightarrow\ f(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}\,,\ \text{da } f(0) = 1\,.$$