Aufgabe 23: Berechnen Sie die ersten beiden Näherungen der folgenden Funktionen nach dem Newton-Verfahren $x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $(n \in \mathbb{N})$.
a) Für die affin-lineare Funktion $f(x) = 2x + 6$ im Intervall $[-4, 0]$ mit $x_0 = -1$ als Startwert.
b) Für die quadratische Funktion $q(x) = x^2 - 4$ im Intervall $[0, 3]$ mit $x_0 = 1$ als Startwert.
c) Für die kubische Funktion $k(x) = x^3 - 5x^2 - 2x + 24$ im Intervall $[-3, 4]$ mit $x_0 = 1$ als Startwert.

Aufgabe 24: Zeigen Sie, dass gilt:

$$\begin{aligned} &\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}, \\ \text{und} \quad &\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Tipp: Vergleichen Sie hierzu die Herleitung der Formel $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$ aus der Vorlesung und definieren Sie

$$\begin{aligned} g(x) &= \sin(x+y) - (\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)) \\ h(x) &= \cos(x+y) - (\cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)\,.) \end{aligned}$$

Betrachten Sie beide Gleichungen gemeinsam und verwenden Sie: Gilt für zwei Funktionen $g(x)$ und $h(x)$: $g(x)^2 + h(x)^2 = 0$, dann folgt $g(x) = 0$ und $h(x) = 0$.

Aufgabe 25: Faltet man ein Stück Papier im DIN-Format mehrfach längs einer Mittellinie, so liegen erst zwei, dann vier Schichten übereinander. Es wird dabei immer kleiner und dicker. Wie oft müsste man es falten können, um einen Turm zu erhalten, der bis zum Mond reicht? (Entfernung des Mondes: 384000 km, Papierdicke 0,2 mm)