Aufgabe 23: Berechnen Sie die ersten beiden Näherungen der folgenden Funktionen nach dem Newton-Verfahren $x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $(n \in \mathbb{N})$.
a) Für die affin-lineare Funktion $f(x) = 2x + 6$ im Intervall $[-4, 0]$ mit $x_0 = -1$ als Startwert.
b) Für die quadratische Funktion $q(x) = x^2 - 4$ im Intervall $[0, 3]$ mit $x_0 = 1$ als Startwert.
c) Für die kubische Funktion $k(x) = x^3 - 5x^2 - 2x + 24$ im Intervall $[-3, 4]$ mit $x_0 = 1$ als Startwert.

LÖSUNG:

a) Um das Ergebnis nach den ersten beiden Iterationen mit der wirklichen Nullstelle vergleichen zu können, berechnen wir diese zuerst auf herkömmliche Weise:

$$f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 2x + 6 = 0 \;\Leftrightarrow\; \boxed{x = -3}\,.$$

Nun zum Newton-Verfahren:

$$f(x) = 2x + 6\,,\;\; f'(x) = 2 > 0$$

Startwert $x_0 = -1$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\; x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = -1 - \frac{f(-1)}{f'(-1)} \\
&= -1 - \frac{4}{2} = -1 - 2 = -3\,. \\
x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = -3 - \frac{f(-3)}{2} = -3\,,\;\text{ da } f(-3) = 0\,! \\
\Rightarrow &\quad x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n \text{ für alle } n \geq 1
\end{aligned}$$

b) Auch diesmal berechnen wir zuerst die Nullstellen, um einschätzen zu können wie gut das Ergebnis des Newton-Verfahrens nach zwei Iterationsschritten ist.

$$0 = q(x) \;\Leftrightarrow\; x^2 - 4 = 0 \;\Leftrightarrow\; (x+2)(x-2) = 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 = -2\,,\; x_2 = 2\,.$$

$$q(x) = x^2 - 4\,,\;\; q'(x) = 2x \geq 0 \text{ in } [0, 3]$$

Startwert $x_0 = 1$,

$$\begin{aligned}
q(1) &= 1 - 4 = -3 \\
q'(1) &= 2 \\
\Rightarrow \ x_1 &= x_0 - \frac{q(x_0)}{q'(x_0)} = 1 - \frac{-3}{2} = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \\
q(x_1) &= q(5/2) = \frac{25}{4} - 4 = \frac{25-16}{4} = \frac{9}{4} \\
q'(x_1) &= q'(5/2) = 2 \cdot \frac{5}{2} = 5 \\
\Rightarrow \ x_2 &= x_1 - \frac{q(x_1)}{q'(x_1)} = \frac{5}{2} - \frac{9/4}{5} = \frac{25 - 2 \cdot 9/4}{10} \\
&= \frac{25 - 9/2}{10} = \frac{50-9}{20} = \frac{41}{20} = 2,05 \\
q(x_2) &= 2,05^2 - 4 = 4,2025 - 4 = 0,2025 \\
q'(x_2) &= q'(2,05) = 2 \cdot 2,05 = 4,1 \\
\Rightarrow \ x_3 &= 2,05 - \frac{0,2025}{4,1} \approx 2,00060975\ldots
\end{aligned}$$

c)

$$k(x) = x^3 - 5x^2 - 2x + 24 = (x+2)(x-3)(x-4) = (x+2)(x^2 - 7x + 12)$$

$$k'(x) = 3x^2 - 10x - 2$$

$$0 = k(x) \ \Leftrightarrow \ x_1 = -2\,, \ x_2 = 3\,, \ x_3 = 4\,.$$

Startwert $x_0 = 1$,
$k(1) = 1 - 5 - 2 + 24 = 25 - 7 = 18$
$k'(1) = 3 - 10 - 2 = 3 - 12 = -9$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \ x_1 &= x_0 - \frac{k(x_0)}{k'(x_0)} = 1 - \frac{18}{-9} = 1 + \frac{18}{9} = 1 + 2 = 3 \\
\Rightarrow \ x_2 &= x_1\,, \text{ da } k(x_1) = k(3) = 0
\end{aligned}$$

Wie bei a) $x_n = x_{n-1} = \ldots = x_3 = x_2 = x_1$!
Nullstelle schon erwischt!

Aufgabe 24: Zeigen Sie, dass gilt:

$$\begin{aligned}
&\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}, \\
\text{und} \quad &\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Tipp: Vergleichen Sie hierzu die Herleitung der Formel $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$ aus der Vorlesung und definieren Sie

$$\begin{aligned}
g(x) &= \sin(x+y) - (\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)) \\
h(x) &= \cos(x+y) - (\cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)\,.)
\end{aligned}$$

Betrachten Sie beide Gleichungen gemeinsam und verwenden Sie: Gilt für zwei Funktionen $g(x)$ und $h(x)$: $g(x)^2 + h(x)^2 = 0$, dann folgt $g(x) = 0$ und $h(x) = 0$.

Lösung:
$g(x) := \sin(x+y) - \sin x \cos y - \cos x \sin y$

$$\begin{aligned} g(0) &= \sin y - 0 - \sin y \cdot 1 = 0\,, \text{ da } \cos 0 = 1\,, \ \sin 0 = 0 \\ g'(x) &= \cos(x+y) - \cos x \cos y + \sin x \sin y \end{aligned}$$

$h(x) := \cos(x+y) - \cos x \cos y + \sin x \sin y = g'(x)\,!$

$$\begin{aligned} h(0) &= \cos y - \cos y + 0\,, \text{ da } \cos 0 = 1\,, \ \sin 0 = 0 \\ h'(x) &= -\sin(x+y) + \sin x \cos y + \cos x \sin y \\ &= -g(x) \end{aligned}$$

Zusammen haben wir $g' = h$ und $h' = -g$. Wir zeigen nun $g^2(x) + h^2(x) \equiv 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Für $z(x) := g^2(x) + h^2(x)$ gilt $z(0) = 0$ (s.oben).
und $z' = 2gg' + 2hh' = 2(gh - hg) \equiv 0 \;\Rightarrow\; z(x) = 0\,!$
$\Rightarrow\; g(x) \equiv 0$ und $h(x) \equiv 0 \;\Rightarrow$ Beh.!

Aufgabe 25: Faltet man ein Stück Papier im DIN-Format mehrfach längs einer Mittellinie, so liegen erst zwei, dann vier Schichten übereinander. Es wird dabei immer kleiner und dicker. Wie oft müsste man es falten können, um einen Turm zu erhalten, der bis zum Mond reicht? (Entfernung des Mondes: 384000 km, Papierdicke 0,2 mm)

Lösung: Nach n faltungen haben wir eine Papierdicke von $0,2 \cdot 2^n$ Millimetern. Wir lösen daher die Gleichung

$$384000000000 = 0,2 \cdot 2^n$$

und erhalten

$$1,92 \cdot 10^{12} = 2^n$$

Mithilfe des Logarithmus erhalten wir dann

$$n = \frac{\log(1,92 \cdot 10^{12})}{\log(2)} \approx 40,80$$

Nach 41 Faltungen ist die gesuchte Höhe erreicht (auch wenn das Experiment natürlich nicht durchführbar ist).