Aufgabe 26: a) Bestimmen Sie den Schnittpunkt S der beiden Geraden G_1 und G_2 zeichnerisch durch Anfertigen einer geeigneten Skizze und rechnerisch durch Lösen des zugehörigen linearen Gleichungssystems.

$$G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -\frac{2}{\sqrt{5}}\,x + \frac{1}{\sqrt{5}}\,y = \frac{1}{\sqrt{5}} \right\}$$
$$G_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{1}{\sqrt{5}}\,x + \frac{2}{\sqrt{5}}\,y = \frac{7}{\sqrt{5}} \right\}$$

b) Bestimmen Sie eine Gerade durch die Punkte $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ wobei sie die Gerade sowohl in der Form $G = \{x + \alpha r \,|\, \alpha \in \mathbb{R}\}$, als auch in der Form $G = \{y \in \mathbb{R}^2 \,|\, n_1 y_1 + n_2 y_2 = d\}$ angeben und berechnen Sie die Schnittpunkte dieser Geraden mit den Koordinatenachsen.

Lösung:

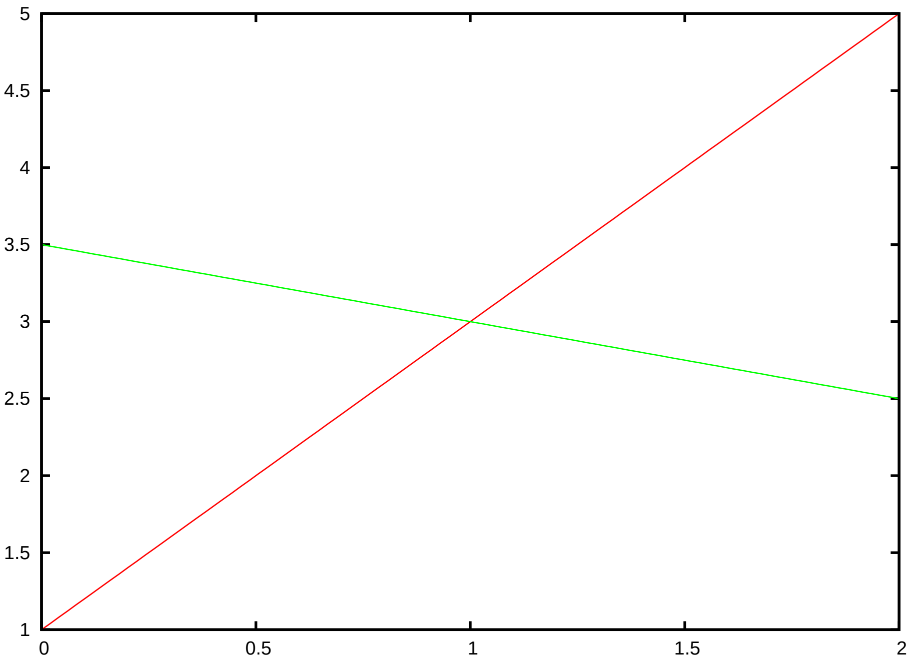
a)

$$\begin{array}{rcrcll}
-\frac{2}{\sqrt{5}}\,x & + & \frac{1}{\sqrt{5}}\,y & = & \frac{1}{\sqrt{5}} & |\cdot\sqrt{5} \\
\frac{1}{\sqrt{5}}\,x & + & \frac{2}{\sqrt{5}}\,y & = & \frac{7}{\sqrt{5}} & |\cdot\sqrt{5} \\
\hline
-2x & + & y & = & 1 & \\
x & + & 2y & = & 7 & |\cdot 2 \\
\hline
-2x & + & y & = & 1 & \\
 & & 5y & = & 15 & \Rightarrow\; y = 3 \\
 & & & & & \Rightarrow\; 2x = 3 - 1 = 2 \\
 & & & & & \Rightarrow\; x = 1
\end{array}$$

$S = (1, 3)$

<u>Skizze:</u>

$$G_1 \;:\; -\frac{2}{\sqrt{5}}\,x + \frac{1}{\sqrt{5}}\,y = \frac{1}{\sqrt{5}} \;\Leftrightarrow\; -2x + y = 1 \;\Leftrightarrow\; y = 2x + 1$$
$$G_2 \;:\; \frac{1}{\sqrt{5}}\,x + \frac{2}{\sqrt{5}}\,y = \frac{7}{\sqrt{5}} \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2}\,x + y = \frac{7}{2} \;\Leftrightarrow\; y = -\frac{1}{2}\,x + \frac{7}{2}$$



Alternative Rechnung:

$$
\begin{aligned}
& 2x + 1 = -1/2x + 7/2 \\
\Leftrightarrow \quad & 4x + 2 = -x + 7 \\
\Leftrightarrow \quad & 5x = 5 \;\Rightarrow\; x = 1 \;\Rightarrow\; y = 2 \cdot 1 + 1 = 3 \quad \checkmark
\end{aligned}
$$

b) Wir wollen die Gerade zuerst in der Form

$$G = \{x + \alpha r \,|\, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

angeben. Dazu setzen wir

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad r = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und erhalten

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Um Die Gerade in der Form

$$G = \{y \in \mathbb{R}^2 \,|\, n_1 y_1 + n_2 y_2 = d\}$$

schreiben zu können müssen wir das folgende Gleichungssystem lösen:

$$
\begin{array}{rrcrrcrl}
 & n_1 & + & 2 & n_2 & = & d & \\
2 & n_1 & + & & n_2 & = & d & \\
\hline
 & n_1 & + & 2 & n_2 & = & d & \\
 & & - & 3 & n_2 & = & -d & \Rightarrow \; n_2 = \frac{d}{3} \\
 & & & & & & & \Rightarrow \; n_1 = d - 2n_2 = \frac{d}{3}
\end{array}
$$

Weiterhin müssen n_1 und n_2 die Gleichung $n_1^2 + n_2^2 = 1$ erfüllen.

$$n_1^2 + n_2^2 = 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{d^2}{9} + \frac{d^2}{9} = 1 \;\Leftrightarrow\; d^2 = \frac{9}{2} \;\Rightarrow\; d = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow n_1 = n_2 = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

d.h.

$$G = \left\{ y \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{1}{\sqrt{2}}\, y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\, y_2 = \frac{3}{\sqrt{2}} \right\}.$$

An dieser Form kann man nun auch leicht die Schnittpunkte mit den Achsen ablesen. Es sind die Punkte

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 27: Welche der folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^3$ sind Untervektorräume?

a) $\{(1, x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$	ja ☐	nein ☐
b) $\{(x, x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$	ja ☐	nein ☐
c) $\{(x, 2x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\}$	ja ☐	nein ☐
d) $\{(x_1, x_2, x_3) \mid 2x_1 + x_2 = 5x_3\}$	ja ☐	nein ☐
e) $\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + 2x_2 = 7\}$	ja ☐	nein ☐

LÖSUNG:

a) Nein!

$U_0 := \{(1, x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ ist kein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$, da $(0, 0, 0) \notin U_0$.
Aber $U_0 = (1, 0, 0) + \overline{U_0} = (1, 0, 0) + \{(0, x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ ist affiner Unterraum!

b) Ja!

$$\begin{aligned} U_1 &= \{(x, x, x) \mid x \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{ x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

U_1 ist Gerade durch $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ mit Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$a \in U_1 \;\Rightarrow\; \lambda a \in U_1 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

$$a, b \in U_1 \;\Rightarrow\; a + b \in U_1.$$

c) Ja!

$$U_2 = \{(x, 2x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \left\{ x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

wie b)!

d) Ja!

$$\begin{aligned} U_3 &= \{(x_1, x_2, x_3) \mid 2x_1 + x_2 = 5x_3\} \\ &= \{(x_1, x_2, x_3) \mid 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 0\} \\ &= \{(x_1, x_2, x_3) \mid \frac{2}{\sqrt{30}} x_1 + \frac{1}{\sqrt{30}} x_2 - \frac{5}{\sqrt{30}} x_3 = 0\} \end{aligned}$$

U_3 ist also eine Ebene im $\mathbb{R}^3$, die den Ursprung enthält.

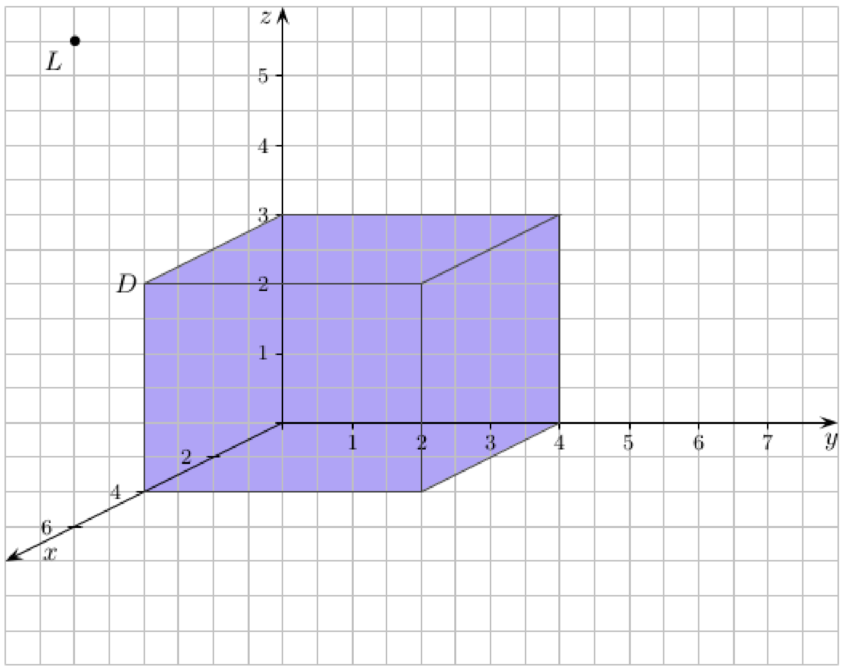
e) <u>Nein!</u>

$$U_4 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + 2x_2 = 7\} \;\Rightarrow\; (0,0,0) \notin U_4\,!$$

Aber U_4 ist affiner UR:

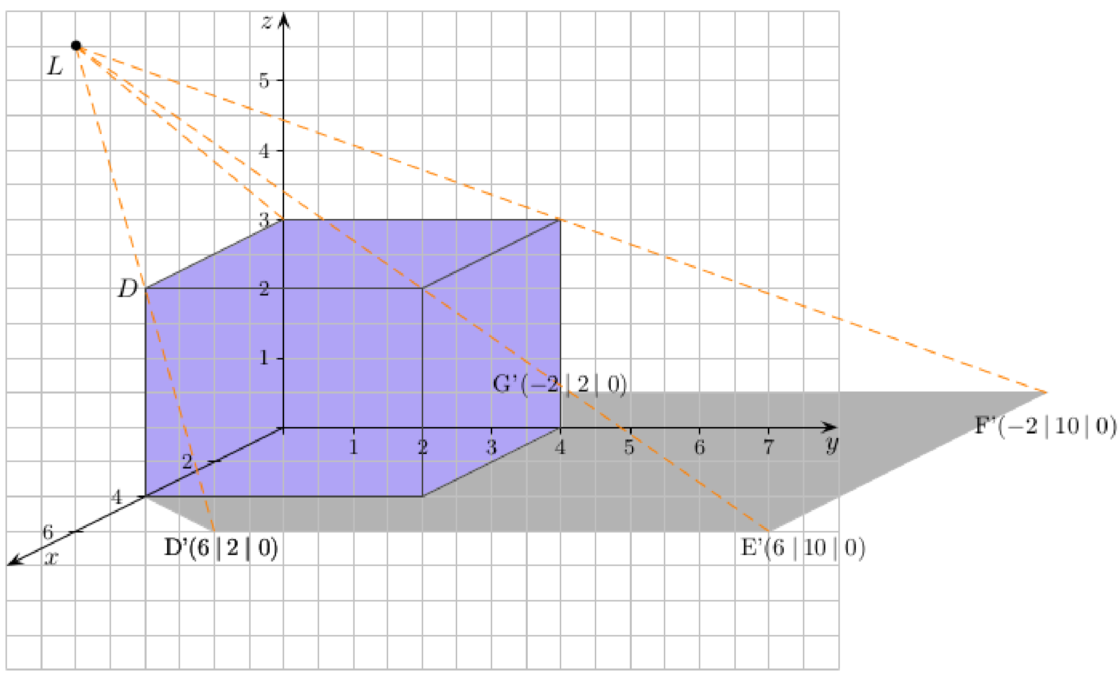
$$U_4 = (1,3,0) + \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + 2x_2 = 0\}\,!$$

Aufgabe 28: Im Punkt $L = (2, -2, 6)$ befindet sich eine punktförmige Lichtquelle (Zentralprojektion). Ermitteln Sie den Schattenpunkt von D und zeichnen Sie den Schatten des Quaders.



Quelle: http://www.nibis.de/ lbs-gym/#kapitel7

Lösung:



Quelle: http://www.nibis.de/ lbs-gym/#kapitel7

Aufgabe 29: Sei $E = \{y \in \mathbb{R}^3 | n_1 y_1 + n_2 y_2 + n_3 y_3 = d\}$ eine Ebene im $\mathbb{R}^3$. Für die Koeffizienten gebe man eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, dass E

a) parallel zur y_1, y_2-Ebene ist,

b) die y_1, y_2-Ebene schneidet,

c) gleich der y_1, y_2-Ebene ist,

d) die y_3-Achse schneidet.

LÖSUNG:

a) Die gesuchte notwendige und hinreichende Bedingung ist $n_1 = n_2 = 0$.

   Dann hat die Ebenengleichung die Form $y_3 = d$. Damit liegen alle Punkte der Form (y_1, y_2, d) auf der Ebene, was eine Parallele zur y_1, y_2-Ebene darstellt. Ist aber z.B. $n_1 \neq 0$, so führt bei $(y_1, y_2, y_3) \in E$ eine Änderung in der Koordinate y_1 dazu, dass $(y_1 + h, y_2, y_3) \notin E$ im Widerspruch zur Parallelität. Damit ist die Bedingung auch notwendig.

b) Dies ist genau das Gegenereignis dazu, parallel zur y_1, y_2-Ebene zu sein. Also muss die notwendige und hinreichende Bedingung $n_1 \neq 0$ oder $n_2 \neq 0$ sein.

c) $E = \{y \in \mathbb{R}^3 | y_3 = 0\}$

d) Die notwendige und hinreichende Bedingung ist $n_3 \neq 0$.

   Dies ist hinreichend, da es dann einen Punkt der Form $(0, 0, y_3)$ auf der Ebene gibt. Wäre $n_3 = 0$, so würde ein Punkte der Form $(0, 0, y_3)$ nur dann auf der Ebene liegen, wenn $d = 0$ ist. Dann liegt aber jeder Punkt der Form $(0, 0, y_3)$ auf der Ebene und die y_3-Ebene ist in E enthalten, was dem Verständnis von Schneiden widerspricht. Damit ist die Bedingung auch notwendig.