Aufgabe 29: Weisen Sie nach, daß die folgenden drei Vektoren des $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -20 \end{pmatrix}$$

linear abhängig sind.

LÖSUNG: Wir lösen das zugehörige lineare Gleichungssystem:

$$\lambda\mathbf{v}_1 + \mu\mathbf{v}_2 + \nu\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lrcrcrcl} \text{I:} & -\lambda & + & \mu & + & 2\nu & = & 0 \\ \text{II:} & -\lambda & & & - & 3\nu & = & 0 \\ \text{III:} & & - & 4\mu & - & 20\nu & = & 0 \end{array} \right\}.$$

Offensichtlich gilt:

$$\begin{aligned} \text{II} &\Leftrightarrow \nu = -\frac{1}{3}\lambda \Leftrightarrow \lambda = -3\nu\,. \\ \text{III} &\Leftrightarrow \nu = -\frac{1}{5}\mu \Leftrightarrow \mu = -5\nu\,. \end{aligned}$$

Einsetzen von II und III in I liefert:

$$0 = 3\nu - 5\nu + 2\nu. \quad \checkmark$$

Also ist ν „frei" wählbar. $\nu = 1$ liefert: $\lambda = -3\,,\ \mu = -5$. Damit erhalten wir

$$\Rightarrow \ (-3)\mathbf{v}_1 + (-5)\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zur Kontrolle rechnen wir noch

$$\mathbf{v}_3 = 3\mathbf{v}_1 + 5\mathbf{v}_2 = 3\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 20 \end{pmatrix}. \quad \checkmark$$

Aufgabe 30: Ein Tetraeder $T \subset \mathbb{R}^3$ werde durch die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

aufgespannt. Berechnen Sie das Volumen dieses Tetraeders unter Verwendung des Skalarprodukts und des Kreuzprodukts. Hierfür dürfen Sie die Formel

$$V(T) = \frac{1}{3}A \cdot h$$

verwenden, wobei A die Grundfläche und h die Höhe des Tetraeders sind.

LÖSUNG: Ein Tetraeder sei durch die Vektoren $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ aufgespannt, wobei das durch a und b definierte Dreieck seine Grundfläche bilden soll. Dann gilt $A = \frac{1}{2}|a \times b|$, denn der Betrag des Kreuzproduktes ist gerade die Fläche des von a, b aufgespannten Parallelogramms. Demnach ist die Hälfte hiervon die Fläche des gesuchten Dreiecks. Die Höhe des Tetraeders ist nun die Projektion von c auf einen Vektor, der senkrecht auf a und b steht und die Länge 1 hat. Ein solcher Vektor ist gerade durch das normierte Kreuzprodukt $\dfrac{a \times b}{|a \times b|}$ gegeben. Die Projektion berechnet sich dann durch das Skalarprodukt, d.h. es gilt $h = c \cdot \dfrac{a \times b}{|a \times b|} = \dfrac{a \times b}{|a \times b|} \cdot c$. Damit folgt insgesamt:

$$V(T) = \frac{1}{3} A \cdot h = \frac{1}{3} \left| \frac{1}{2} |a \times b| \frac{a \times b}{|a \times b|} \cdot c \right| = \frac{1}{6} \left| (a \times b) \cdot c \right|$$

Der Betrag muss verwendet werden, wenn nicht klar ist, ob die Vektoren ein Rechtssystem bilden. Tun sie es nicht, könnte das Produkt negativ werden.

In unserem konkreten Fall seien

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

dann ist

$$a \times b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ 1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist dann

$$(a \times b) \cdot c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2,$$

also ist das gesuchte Volumen $V = \frac{1}{6} \cdot 2 = \frac{1}{3}$.

Aufgabe 31: a) Gegeben seien die folgenden drei Punkte im $\mathbb{R}^3$:

$$P_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die Ebene E, welche durch diese drei Punkte geht, in Parameterform, d.h. in der Form

$$E = \{x + \lambda r + \mu q \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\},$$

mit $x, r, q \in \mathbb{R}^3$ an.

b) Berechnen Sie mit Hilfe des Kreuzproduktes eine Darstellung der Ebene der Form $E = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = d\}$.

LÖSUNG: a) Wir berechnen eine Parameterdarstellung von E wie folgt:

$$\begin{aligned} E: \quad \mathbf{x} &= \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \left(\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + \mu \left(\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Zur <u>Probe</u> rechnet man nach, daß

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{c} \lambda = 1 \\ \mu = 0 \end{array} \right\} \text{ liefert } \mathbf{x} &= \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = P_1 \, . \\ \left\{ \begin{array}{c} \lambda = 0 \\ \mu = 1 \end{array} \right\} \text{ liefert } \mathbf{x} &= \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} = P_2 \, . \\ \left\{ \begin{array}{c} \lambda = 0 \\ \mu = 0 \end{array} \right\} \text{ liefert } \mathbf{x} &= \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = P_0 \, . \end{aligned}$$

b) Wir berechnen einen Normalenvektor an E mit Hilfe des Kreuzproduktes der beiden Richtungsvektoren von E.

$$\mathbf{n} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7+7 \\ -8-0 \\ 0-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ -8 \end{pmatrix} .$$

Zur <u>Probe</u> rechnet man nach, daß

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} &= 0 - 8 + 8 = 0, \quad (\checkmark) \\ \mathbf{n} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix} &= 0 - 56 + 56 = 0. \quad (\checkmark) \end{aligned}$$

Da

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ -8 \end{pmatrix} = -8x_2 - 8x_3$$

und wir wissen, dass $P_0 \in E$, also

$$d = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ -8 \end{pmatrix} = 16$$

ist die Ebene E geben durch

$$E = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_2 + x_3 = -2\}.$$

Bemerkung: Es war in der Aufgabenstellung nicht gefordert, dass $\mathbf{n}$ normiert ist. Natürlich ist die Lösung $E = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_3 = -\frac{2}{\sqrt{2}}\}$ genauso richtig.

Wir wünschen Ihnen eine schöne Weihnachtspause und einen guten Start in das neue Jahr!