Aufgabe 35: Betrachten Sie die Abbildung

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Betrachten Sie des Weiteren die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass v_1, v_2, v_3 eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist. Geben Sie die Matrixdarstellung von f bzgl. der Basis v_1, v_2, v_3 an.

Aufgabe 36: Betrachten Sie die Erde als Kugel mit Radius r um den Ursprung. Nehmen Sie an, der Äquator liege in der x-y-Ebene, der Nullmeridian in der x-z-Ebene (mit $x > 0$), und der Nordpol auf der positiven z-Achse.

a) Geben Sie die Koordinaten des Nordpols P an.

b) Angenommen, die geographische Breite werde durch einen Winkel $\theta \in [0, \pi]$ (0 für den Nordpol, $\pi/2$ (bzw. 90°) für den Äquator, π (bzw. 180°) für den Südpol) beschrieben. Betrachten Sie den Punkt Q, der auf dem Nullmeridian liegt und (in diesem Sinne) Breite θ hat. Geben Sie die Matrixdarstellung der Drehung an, die P auf Q abbildet. Berechnen Sie mittels des Matrix-Vektor-Produkts die Koordinaten von Q.

c) Angenommen, die geographische Länge werde durch einen Winkel $\phi \in (-\pi, \pi]$ (0 für den Nullmeridian, positive Winkel für östliche Länge, d.h. für $y > 0$) beschrieben. Betrachten Sie den Punkt R, der auf dem selben Breitenkreis wie Q liegt und (in diesem Sinne) Länge ϕ hat. Geben Sie die Matrixdarstellung der Drehung an, die Q auf R abbildet. Berechnen Sie mittels des Matrix-Vektor-Produkts die Koordinaten von R.

d) Geben Sie die Matrixdarstellung der Verkettung der beiden Drehungen an. Berechnen Sie das Matrix-Vektor-Produkt dieser Matrix mit dem Vektor P. Welcher Punkt ergibt sich?

Tipp: Eine Skizze kann hilfreich sein. Achten Sie darauf, dass die Drehwinkel das richtige Vorzeichen haben!

Aufgabe 37: Gegeben sei das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & & & = & 0 \\ & & 3x_2 & + & x_3 & = & b \\ x_1 & & & - & a \cdot x_3 & = & 2 \end{array}$$

Untersuchen Sie, für welche Werte der reellen Parameter a und b dieses System
(a) keine, (b) genau eine, (c) unendlich viele Lösungen hat.
Im Falle (c) bestimme man ferner die allgemeine Lösung in Vektorform!