Aufgabe 38: Bestimmen Sie den Rang der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 39:

a) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung A einer Drehung im $\mathbb{R}^2$, die um 45° entgegen dem Uhrzeigersinn um den Ursprung rotiert. Geben Sie die Inverse A^{-1} an und verifizieren Sie $AA^{-1} = \mathbb{1}$.

b) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung B einer Spiegelung an der x_1-Achse im $\mathbb{R}^2$. Geben Sie die Inverse B^{-1} an und verifizieren Sie $B^{-1}B = \mathbb{1}$.

Aufgabe 40: Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrizen

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 & 10 \\ 3 & 0 & 7 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & -1 & 10 \end{pmatrix}, \quad \text{b)} \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{c)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \text{d)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 8 & 14 & 20 \\ 4 & 11 & 20 & 30 \end{pmatrix},$$

$$\text{Zusatzaufgabe e)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 8 & 11 & 14 \\ 3 & 8 & 14 & 20 & 26 \\ 4 & 11 & 20 & 30 & 40 \\ 5 & 14 & 26 & 40 & 55 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 41: Wir betrachten ein Parallelepiped $\mathbf{P}$, welches von den drei Vektoren $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ aufgespannt wird. Zusätzlich ist eine affine Abblidung

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

gegeben. Dann ist $f(\mathbf{P})$ wieder ein Parallelepiped (Warum?).

a) Geben Sie die drei Vektoren an, die das Parallelepiped $f(\mathbf{P})$ aufspannen.

b) Zeigen Sie, dass für das Volumen des Parallelepipeds $f(\mathbf{P})$ gilt

$$\operatorname{vol} f(\mathbf{P}) = |\det \mathbf{A}| \cdot |\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})| = |\det \mathbf{A}| \cdot \operatorname{vol}(\mathbf{P}).$$

c) Berechnen Sie für

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

das Volumen von $\mathbf{P}$ $\operatorname{vol}(\mathbf{P})$, sowie das Volumen von $f(\mathbf{P})$ $\operatorname{vol}(f(\mathbf{P}))$. Berechnen Sie $\operatorname{vol}(f(\mathbf{P}))$ einmal mit Hilfe der im vorigen Aufgabenteil angegeben Formel, als auch auf direktem Weg, indem sie zuerst $f(\mathbf{u})$, $f(\mathbf{v})$ und $f(\mathbf{w})$ berechnen.