Aufgabe 38: Bestimmen Sie den Rang der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

LÖSUNG: Zunächst formen wir die Matrix mit dem Gauß-Algorithmus um

$$\begin{array}{rrrcc}
1 & 2 & 3 & | \cdot (-4) & | \cdot (-7) \\
4 & 5 & 6 & \hookleftarrow + & \\
7 & 8 & 9 & & \hookleftarrow + \\
\hline
1 & 2 & 3 & & \\
0 & -3 & -6 & | \cdot (-2) & \\
0 & -6 & -12 & \hookleftarrow + & \\
\hline
1 & 2 & 3 & & \\
0 & -3 & -6 & & \\
0 & 0 & 0 & &
\end{array}$$

An der neuen Form der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

können wir ablesen, dass sie Rang 2 hat.

Aufgabe 39:

a) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung A einer Drehung im $\mathbb{R}^2$, die um 45° entgegen dem Uhrzeigersinn um den Ursprung rotiert. Geben Sie die Inverse A^{-1} an und verifizieren Sie $AA^{-1} = \mathbb{1}$.

b) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung B einer Spiegelung an der x_1-Achse im $\mathbb{R}^2$. Geben Sie die Inverse B^{-1} an und verifizieren Sie $B^{-1}B = \mathbb{1}$.

LÖSUNG:

a) Die Matrixdarstellung A einer Drehung im $\mathbb{R}^2$, die um den Winkel α entgegen dem Uhrzeigersinn um den Ursprung rotiert ist gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Mit $\alpha = 45^\circ$ ergibt sich also

$$A \;=\; \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Die Inverse erhält man durch geometrische Überlegungen. Um eine Drehung um 45° rückgängig zu machen, muss man um -45° drehen. D.h. die Inverse zu A ist gegeben durch

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(-45^\circ) & -\sin(-45^\circ) \\ \sin(-45^\circ) & \cos(-45^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Man kann die Inverse natürlich auch Ausrechnen wie im Skript beschrieben. $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbb{1}$ verifiziert man durch Nachrechnen.

b) In $\mathbb{R}^2$ is die Spiegelung an einer Geraden durch den Ursprung mit Normalenvektor n und $\|n\| = 1$ ist gegeben durch

$$B = \mathbb{1} - 2nn^T = \begin{pmatrix} 1 - 2n_1 n_1 & -2n_1 n_2 \\ -2n_1 n_2 & 1 - 2n_2 n_2 \end{pmatrix}.$$

Da wir an der x_1-Achse spiegeln wollen ist unser Normalenvektor $n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, d.h

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Inverse erhält man durch geometrische Überlegungen. Spiegelt man zweimal an der gleichen Geraden, so erhält man den Punkt, mit dem man gestartet ist. D.h. durch zweimaliges Anwenden ein und derselben Spiegelung ändert sich nichts. Es gilt also

$$B = B^{-1}.$$

Man kann die Inverse natürlich auch Ausrechnen wie im Skript beschrieben. $BB^{-1} = B^{-1}B = \mathbb{1}$ verifiziert man durch Nachrechnen.

Aufgabe 40: Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrizen

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 & 10 \\ 3 & 0 & 7 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & -1 & 10 \end{pmatrix}, \quad \text{b)} \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{c)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \text{d)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 8 & 14 & 20 \\ 4 & 11 & 20 & 30 \end{pmatrix},$$

$$\text{Zusatzaufgabe e)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 8 & 11 & 14 \\ 3 & 8 & 14 & 20 & 26 \\ 4 & 11 & 20 & 30 & 40 \\ 5 & 14 & 26 & 40 & 55 \end{pmatrix}.$$

LÖSUNG:

a)

$$
\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 & 10 \\ 3 & 0 & 7 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & -1 & 10 \end{pmatrix} &= (-1)^{3+2}(-1)\cdot\det\begin{pmatrix} 4 & 7 & 10 \\ 3 & 7 & 5 \\ 5 & -1 & 10 \end{pmatrix} \\
&\quad \text{(entwickelt nach der 2ten Spalte)} \\
&= \det\begin{pmatrix} 4 & 7 & 10 \\ 3 & 7 & 5 \\ 5 & -1 & 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{(-1)}\cdot\frac{1}{7}\cdot\det\begin{pmatrix} 4 & 7 & 10 \\ -3 & -7 & -5 \\ 35 & -7 & 70 \end{pmatrix} \\
&\quad \text{(Zeile II = (-1) Zeile II,} \\
&\quad \text{Zeile III = 7 Zeile III)} \\
&= -\frac{1}{7}\cdot\det\begin{pmatrix} 4 & 7 & 10 \\ 1 & 0 & 5 \\ 39 & 0 & 80 \end{pmatrix} \\
&\quad \text{(Zeile II = Zeile II + Zeile I,} \\
&\quad \text{Zeile III = Zeile III + Zeile I)} \\
&= -\frac{1}{7}\cdot(-1)^{1+2}\cdot 7\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 39 & 80 \end{pmatrix} \\
&\quad \text{(entwickelt nach der 2ten Spalte)} \\
&= 80 - 5\cdot 39 = 5\cdot(16-39) \\
&= 5\cdot(-23) = -115
\end{aligned}
$$

b) Aus der Vorlesung wissen wir, dass sich die Determinante einer rechten oberen Dreiecksmatrix berechnen lässt, indem man das Produkt der Diagonaleinträge berechnet:

$$
\det\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 5! = 120.
$$

c) Offensichtlich gilt die Regel auch für linke untere Dreieckmatrizen, so dass sich die Determinante wie folgt berechnet:

$$
\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 5! = 120.
$$

d) Die Determinante dieser Matrix berechnen wir, indem wir die Matrix mittels Gaußschem Eliminationsverfahren auf die Gestalt einer rechten oberen Dreiecksmatrix bringen.

$$
\begin{array}{cccclll}
1 & 2 & 3 & 4 & \mid\cdot(-2) & \mid\cdot(-3) & \mid\cdot(-4) \\
2 & 5 & 8 & 11 & \hookleftarrow + & & \\
3 & 8 & 14 & 20 & & \hookleftarrow + & \\
4 & 11 & 20 & 30 & & & \hookleftarrow + \\
\hline
1 & 2 & 3 & 4 & & & \\
0 & 1 & 2 & 3 & \mid\cdot(-2) & \mid\cdot(-3) & \\
0 & 2 & 5 & 8 & \hookleftarrow + & & \\
0 & 3 & 8 & 14 & & \hookleftarrow + & \\
\hline
1 & 2 & 3 & 4 & & & \\
0 & 1 & 2 & 3 & & & \\
0 & 0 & 1 & 2 & \mid\cdot(-2) & & \\
0 & 0 & 2 & 5 & \hookleftarrow + & & \\
\hline
1 & 2 & 3 & 4 & & & \\
0 & 1 & 2 & 3 & & & \\
0 & 0 & 1 & 2 & & & \\
0 & 0 & 0 & 1 & & &
\end{array}
$$

Nun sehen wir, dass wir die Determinante in diesem speziellen Fall sogar einfach ablesen können, da sie 1 ist.

e) Analog zum vorherigen Teil ergibt sich:

$$
\begin{array}{ccccclllll}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \mid\cdot(-2) & \mid\cdot(-3) & \mid\cdot(-4) & \mid\cdot(-5) \\
2 & 5 & 8 & 11 & 14 & \hookleftarrow + & & & \\
3 & 8 & 14 & 20 & 26 & & \hookleftarrow + & & \\
4 & 11 & 20 & 30 & 40 & & & \hookleftarrow + & \\
5 & 14 & 26 & 40 & 55 & & & & \hookleftarrow + \\
\hline
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & & & \\
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \mid\cdot(-2) & \mid\cdot(-3) & \mid\cdot(-4) & \\
0 & 2 & 5 & 8 & 11 & \hookleftarrow + & & & \\
0 & 3 & 8 & 14 & 20 & & \hookleftarrow + & & \\
0 & 4 & 11 & 20 & 30 & & & \hookleftarrow + & \\
\hline
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & & & \\
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & & & & \\
0 & 0 & 1 & 2 & 3 & \mid\cdot(-2) & \mid\cdot(-3) & & \\
0 & 0 & 2 & 5 & 8 & \hookleftarrow + & & & \\
0 & 0 & 3 & 8 & 14 & & \hookleftarrow + & & \\
\hline
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & & & \\
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & & & & \\
0 & 0 & 1 & 2 & 3 & & & & \\
0 & 0 & 0 & 1 & 2 & \mid\cdot(-2) & & & \\
0 & 0 & 0 & 2 & 5 & \hookleftarrow + & & & \\
\hline
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & & & \\
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & & & & \\
0 & 0 & 1 & 2 & 3 & & & & \\
0 & 0 & 0 & 1 & 2 & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & &
\end{array}
$$

Die Determinante ist 1.

Aufgabe 41: Wir betrachten ein Parallelepiped $\mathbf{P}$, welches von den drei Vektoren $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ aufgespannt wird. Zusätzlich ist eine affine Abblidung

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

gegeben. Dann ist $f(\mathbf{P})$ wieder ein Parallelepiped (Warum?).

a) Geben Sie die drei Vektoren an, die das Parallelepiped $f(\mathbf{P})$ aufspannen.

b) Zeigen Sie, dass für das Volumen des Parallelepipeds $f(\mathbf{P})$ gilt

$$\operatorname{vol} f(\mathbf{P}) = |\det \mathbf{A}| \cdot |\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})| = |\det \mathbf{A}| \cdot \operatorname{vol}(\mathbf{P}).$$

c) Berechnen Sie für

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

das Volumen von $\mathbf{P}$ $\operatorname{vol}(\mathbf{P})$, sowie das Volumen von $f(\mathbf{P})$ $\operatorname{vol}(f(\mathbf{P}))$. Berechnen Sie $\operatorname{vol}(f(\mathbf{P}))$ einmal mit Hilfe der im vorigen Aufgabenteil angegeben Formel, als auch auf direktem Weg, indem sie zuerst $f(\mathbf{u})$, $f(\mathbf{v})$ und $f(\mathbf{w})$ berechnen.

LÖSUNG:

a) Das Parallelepiped $\mathbf{P}$ wird aufgespannt von den drei Vektoren $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$, d.h.

$$\begin{aligned} \mathbf{P} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad & \mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{u} + \lambda_2 \mathbf{v} + \lambda_3 \mathbf{w}, \\ & \text{wobei } \lambda_i \in [0,1] \text{ für } i = 1,2,3\}. \end{aligned}$$

Das Parallelepiped $f(\mathbf{P})$ wird also aufgespannt von den drei Vektoren $f(\mathbf{u}) = \mathbf{A}\mathbf{u}$, $f(\mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{v}$, $f(\mathbf{w}) = \mathbf{A}\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ und ist gegeben durch

$$\begin{aligned} f(\mathbf{P}) := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad & \mathbf{y} = \lambda_1 f(\mathbf{u}) + \lambda_2 f(\mathbf{v}) + \lambda_3 f(\mathbf{w}), \\ & \text{wobei } \lambda_i \in [0,1] \text{ für } i = 1,2,3\}. \end{aligned}$$

b) Für das Volumen des Parallelepipeds $f(\mathbf{P})$ gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{vol}(\mathbf{P}) &= |\det \underbrace{(f(\mathbf{u}), f(\mathbf{v}), f(\mathbf{w}))}_{\text{Matrix mit Spalten } f(\mathbf{u}), f(\mathbf{v}), f(\mathbf{w})} | \\ &= |\det(\mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{A}\mathbf{v}, \mathbf{A}\mathbf{w})| \\ &= |\det(\mathbf{A} \cdot \underbrace{(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})}_{\text{Matrix mit Spalten } \mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}})| \\ &= |\det \mathbf{A} \cdot \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})| \\ &= |\det \mathbf{A}| \cdot |\underbrace{\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})}_{= \operatorname{vol} \mathbf{P}}| \end{aligned}$$

c) Das Volumen von $\mathbf{P}$ berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}\,(\mathbf{P}) &= |\det{(u,v,w)}| \\
&= \left|\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}\right| \\
&= \left|\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}\right| \\
&\ \text{(Zeile II' = Zeile II - Zeile I; Zeile III' = Zeile III - 3Zeile I)} \\
&= \left|(-1)^{1+1}\cdot 1\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}\right| \\
&\ \text{(entwickelt nach erster Spalte)} \\
&= |-2+12| = |10| = 10.
\end{aligned}$$

Für die Berechnung von $\mathrm{vol}(f(\mathbf{P}))$ benutzen wir zuerst die Formel aus dem vorherigen Aufgabenteil

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(f(\mathbf{P})) &= |\det\mathbf{A}|\cdot\mathrm{vol}(\mathbf{P}) \\
&= 1\cdot 2\cdot 3\cdot 10 \\
&= 6\cdot 10 \\
&= 60.
\end{aligned}$$

Man kann aber auch erst die Vektoren $f(\mathbf{u})$, $f(\mathbf{v})$ und $f(\mathbf{w})$ berechnen

$$f(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad f(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad f(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und anschließend $\mathrm{vol}(f(\mathbf{P}))$ berechnen

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(f(\mathbf{P})) &= \left|\det\begin{pmatrix} 5 & 2 & 6 \\ 5 & 3 & 9 \\ 9 & -3 & 3 \end{pmatrix}\right| \\
&= 5\cdot 3\cdot 3 + 2\cdot 9\cdot 9 + 6\cdot 5\cdot(-3) - 9\cdot 3\cdot 6 - (-3)\cdot 9\cdot 5 - 3\cdot 5\cdot 2 \\
&= 45 + 162 - 90 - 162 + 135 - 30 \\
&= 60.
\end{aligned}$$