Aufgabe 42: Rechnen Sie nach, dass sich die Determinante einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{3,3}$ mit folgender Regel berechnen lässt:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Lösung: Um die Regel nachzurechnen, entwickeln wir die Determinante nach der ersten Spalte

$$\begin{aligned}
\det A &= \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1} \\
&= (-1)^{1+1} a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + (-1)^{2+1} a_{21} \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\
&\quad + (-1)^{3+1} a_{31} \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \\
&= (-1)^{1+1} a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) + (-1)^{2+1} a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) \\
&\quad + (-1)^{3+1} a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}) \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}
\end{aligned}$$

Achtung: Die Berechnung von 4×4-Determinanten funktioniert *nicht* völlig analog, hier ergeben sich insgesamt 24 Summanden (mit einer nicht ganz so regelmäßigen Struktur) mit je 4 Faktoren.

Aufgabe 43:

a) Man bestimme f_x und f_y für $f(x,y) = \frac{x}{y^2} - \frac{y}{x^2}$.

b) Man bestimme $f_{x,x}$, $f_{y,y}$, $f_{x,y}$ und $f_{y,x}$ für $f(x,y) = 2x^2 - 5xy + y^2$ und $f(x,y) = \sin(3x)\cos(4y)$.

Hinweis: Dabei ist f_x die partielle Ableitung nach x, $f_{x,y}$ die zweite partielle Ableitung, wobei zuerst nach x und danach nach y abgeleitet wird usw.

Lösung:

a) $f_x(x,y) = \frac{1}{y^2} + \frac{2y}{x^3}$ und $f_y(x,y) = -\frac{1}{x^2} - \frac{2x}{y^3}$

b) Für die erste Funktion gilt $f_x(x,y) = 4x - 5y$, $f_y(x,y) = 2y - 5x$, $f_{x,x}(x,y) = 4$, $f_{y,y}(x,y) = 2$ und $f_{x,y}(x,y) = f_{y,x}(x,y) = -5$.

Für die zweite Funktion gilt $f_x(x,y) = 3\cos(4y)\cos(3x)$, $f_y(x,y) = -4\sin(3x)sin(4y)$, $f_{x,x}(x,y) = -9\cos(4y)\sin(3x)$, $f_{y,y}(x,y) = -16\sin(3x)\cos(4y)$ und schließlich $f_{x,y}(x,y) = f_{y,x}(x,y) = -12\sin(4y)\cos(3x)$.

Aufgabe 44: Gegeben sind die Funktionen

a) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$

b) $g(x_1, x_2) = \frac{1}{4}x_1^2 + x_2^2$

Zeichnen Sie die 1−Niveaulinie. Berechnen Sie die Gradienten der Funktionen an den vier Stellen der Form $(x_1, 0)$, $(0, x_2)$ und an den vier Stellen der Form (x_1, x_1), $(x_1, -x_1)$, die auf der 1−Niveaulinie liegen. Skizzieren Sie jeweils die 8 Gradienten als Vektoren, die in den zugehörigen Punkten starten.

LÖSUNG:

a) Die 1−Niveaumenge ist gegeben durch

$$N_1(f) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$

und ist ein Kreis mir Radius 1.
Die Stellen, an denen der Gradient berechnet werden soll werden wie folgt ermittelt

$$f(x_1, 0) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -1 \text{ oder } x_1 = 1,$$

$$f(0, x_2) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_2^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = -1 \text{ oder } x_2 = 1,$$

$$f(x_1, x_1) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1^2 + x_1^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1^2 = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ oder } x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$f(x_1, -x_1) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1^2 + (-x_1)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1^2 = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ oder } x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Der Gradient der Funktion f an der Stelle (x_1, x_2) ist

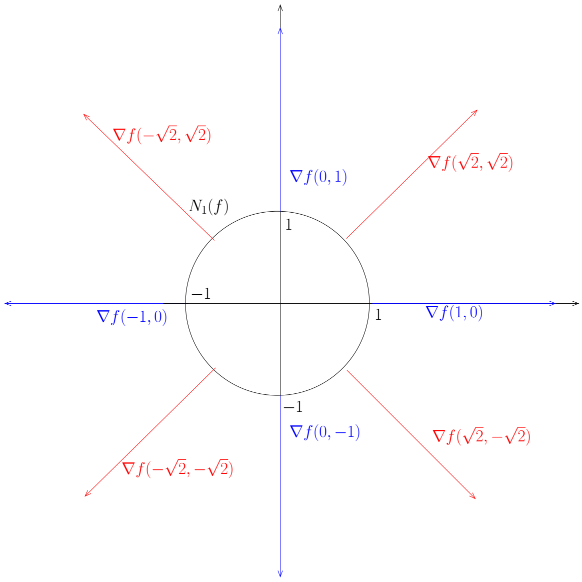
$$\operatorname{grad} f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}.$$

$$\operatorname{grad} f(-1, 0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{grad} f(1, 0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\operatorname{grad} f(0, -1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{grad} f(0, 1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\operatorname{grad} f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{grad} f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

$$\operatorname{grad} f(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{grad} f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$



b) Die 1−Niveaulinie ist gegeben durch

$$N_1(g) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, g(x_1, x_2) = \frac{1}{4}x_1^2 + x_2^2 = 1\}.$$

$$g(x_1, 0) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{4}x_1^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -2 \text{ oder } x_1 = 2,$$

$$g(0, x_2) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_2^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = -1 \text{ oder } x_2 = 1$$

Bei $N_1(g)$ handelt es sich also um eine Ellipse mit den Halbachsen 2 und 1.

$$g(x_1, x_1) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{4}x_1^2 + x_1^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1^2 = \frac{4}{5} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -\frac{2}{\sqrt{5}} \text{ oder } x_1 = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

$$g(x_1, -x_1) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{4}x_1^2 + (-x_1)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1^2 = \frac{4}{5} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -\frac{2}{\sqrt{5}} \text{ oder } x_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Der Gradient der Funktion g an der Stelle (x_1, x_2) ist

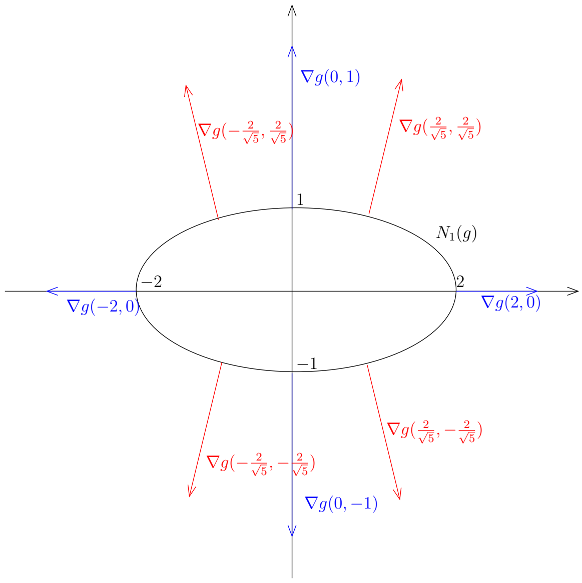
$$\text{grad} g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{grad} f(-2, 0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{grad} f(2, 0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{grad} f(0, -1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \text{grad} f(0, 1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\text{grad} f(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{4}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \qquad \text{grad} f(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{4}{\sqrt{5}} \end{pmatrix},$$

$$\text{grad} f(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{4}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \qquad \text{grad} f(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{4}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$



$\nabla g(0,1)$
$\nabla g(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$
$\nabla g(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$
1
$N_1(g)$
-2
2
$\nabla g(-2,0)$
$\nabla g(2,0)$
-1
$\nabla g(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}})$
$\nabla g(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}})$
$\nabla g(0,-1)$