Aufgabe 45: Betrachten Sie die Funktion

$$f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \qquad \text{mit} \qquad x^2 + y^2 < 1.$$

a) Worum handelt es sich bei dem Graphen dieser Funktion?

b) Berechnen Sie $\nabla f(x,y)$.

c) Bestimmen Sie den Tangentialraum $T_{(x,y,f(x,y))}G_f$ an den Graphen von f in einem beliebigen Punkt $(x,y,f(x,y))$.

d) Bestimmen Sie die Normale $N(x,y)$ an den Graphen von f in einem beliebigen Punkt (x,y).

e) Geben Sie $T_{(x,y,f(x,y))}G_f$ und $N(x,y)$ für $(x,y) = (0,0)$ und $(x,y) = (\frac{1}{2}, 0)$ an.

LÖSUNG:

a) Bei dem Graphen der Funktion f handelt es sich um die obere Hälfte der Einheitskugel (Kugel mit Radius 1) mit Mittelpunkt im Ursprung.

b)

$$\nabla f(x,y) = -\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right)$$

c)

$$\begin{aligned}
T_{(x,y,f(x,y))}G_f &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix} + v \,\middle|\, v \in \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_x f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_y f \end{pmatrix} \right\} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{1-x^2-y^2} \end{pmatrix} + v \,\middle|\, v \in \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{pmatrix} \right\} \right\}
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
N(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{1+\|\nabla f\|^2}} \begin{pmatrix} -\nabla f \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{1-x^2-y^2}}} \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{1-x^2-y^2}}} \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \sqrt{1-x^2-y^2} \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{1-x^2-y^2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}
T_{(0,0,1)}G_f &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + v \,\middle|\, v \in \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\} \\
T_{(\frac{1}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2})}G_f &= \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} + v \,\middle|\, v \in \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N(0,0) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
N\left(\frac{1}{2},0\right) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Aufgabe 46: Bestimmen Sie die Gleichung des Tangentialraumes an den Graphen der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto f(x,y) = 2x + 5y^2x$ im Punkte $(2,1,f(2,1))$.

Lösung: Es gilt $f(2,1) = 14$. Damit geht die Tangentialebene (=Tangentialraum) durch den Punkt $(2,1,14)$. Weiterhin ist

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2 + 5y^2 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 10xy.$$

Einsetzen liefert $\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = 7$ und $\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = 20$. Damit lautet die Gleichung der Tangentialebene

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 14 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 20 \end{pmatrix} \right\}.$$