

Aufgabe 7: Betrachten Sie die fünf Punkte

$$\begin{array}{cccccc} x_i & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ y_i & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

und bestimmen Sie mit der Methode der kleinsten Quadrate dasjenige quadratische Polynom p , das diese Punkte am besten approximiert. Verwenden Sie hierzu die Normalengleichung.

LÖSUNG: Die quadratischen Polynome lassen sich wie folgt darstellen:

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

wobei $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$.

Wir suchen P so, dass

$$\sum_i (P(x_i) - y_i)^2 = \sum_i (a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 - y_i)^2 = \|Aa - y\|^2$$

minimal sei.

$$A^T A a = A^T y$$

mit

$$a = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)^T$$

$$y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)^T = (2, 1, 0, 1, 2)^T$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \\ 1 & x_4 & x_4^2 \\ 1 & x_5 & x_5^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{pmatrix}$$

$$g = A^T y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Jetzt lösen wir die Gleichung $Ba = g$ (B und g sind oben definiert) (zum Beispiel) mit QR -Zerlegung.

Sei dazu

$$u_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$
$$\|u_1\| = 5\sqrt{5}$$
$$\alpha_1 = -\text{sign}(u_{11})\|u_1\| = -5\sqrt{5}$$

und weiter

$$n_1 = u_1 - \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 + 5\sqrt{5} \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$Q^{(1)} = \mathbb{1} - 2 \frac{n_1 n_1^T}{\|n_1\|^2} = \mathbb{1} - \frac{1}{125 + 25\sqrt{5}} n_1 n_1^T$$
$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$R_1 = Q^{(1)T} B = Q^{(1)} B = \begin{pmatrix} -5\sqrt{5} & 0 & -\frac{78}{\sqrt{5}} \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{14}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Wir brauchen keinen weiteren Schritt, weil R_1 schon Dreiecks-Gestalt hat und können unser System jetzt durch Rückwärts-Einsetzen lösen.

Die neue System-Gleichung ist

$$R_1 a = g_1 \quad \text{mit } g_1 = Q^{(1)T} g = Q^{(1)} g = \begin{pmatrix} -\frac{42}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{6}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Wir haben dann

$$a_2 = \frac{6}{\sqrt{5}} \frac{\sqrt{5}}{14} = \frac{3}{7}$$
$$a_1 = 0$$
$$-5\sqrt{5} a_0 - \frac{78}{\sqrt{5}} a_2 = -\frac{42}{\sqrt{5}}$$
$$\Rightarrow a_0 = -\frac{1}{5\sqrt{5}} \left(\frac{78}{\sqrt{5}} a_2 - \frac{42}{\sqrt{5}} \right) = \frac{12}{35}$$

und das Polynom ist

$$p = \frac{12}{35} + \frac{3}{7} x^2$$