Algorithmische Mathematik I

Wintersemester 2017/18
Prof. Dr. Ira Neitzel
AR. Dr. Tino Ullrich

universitätbonn

Extrablatt.

Abgabe am **Rosenmontag im Bürgerbüro**.

Aufgabe 1. (LR-Zerlegung)

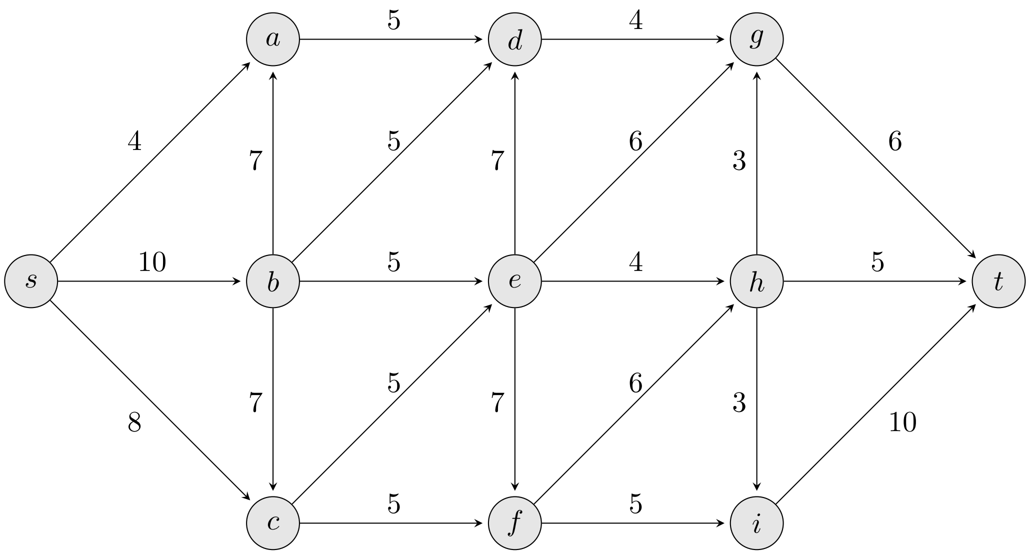
Berechnen Sie die LR–Zerlegung der Matrix A (ohne Pivotisierung)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 & -2 \\ -3 & 4 & -1 & 7 \\ -12 & 10 & -11 & 16 \\ 3 & 5 & 17 & 2 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 2. Zeigen Sie dass der Hyperwürfel (siehe Blatt 11, Aufgabe 3) ein bipartiter Graph ist.

Aufgabe 3. Entscheiden Sie, ob $4^n \in \mathcal{O}(\binom{2n}{n})$ oder $\binom{2n}{n} \in \mathcal{O}(4^n)$ für $n \to \infty$. Begründen Sie Ihre Aussage!

Aufgabe 4. (Flussnetzwerke)



a. Berechnen Sie für das oben stehende Flussnetzwerk einen Maximalfluss f. Die angegebenen Zahlen geben die Kapazität der jeweiligen Kante an. Begründen Sie, dass Ihr Fluss wirklich maximal ist.

b. Geben sie einen Schnitt minimaler Kapazität an.

(5 Punkte)

Aufgabe 5. Sei $T = (V, E)$ ein Graph mit $|V| \geq 2$: Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

a. T ist ein Baum.

b. Zwischen je zwei Knoten $v, w \in V$ gibt es genau einen $v - w-$Weg.

c. T ist zusammenhängend und für alle $e \in E$ ist $T - e$ unzusammenhängend.

d. T ist kreisfrei und für alle $e \in \{(v, w) \in V \times V : v \neq w\} \setminus E$ enthält $T + e$ einen Kreis.

e. T ist zusammenhängend und $|E| = |V| - 1$.

f. T ist kreisfrei und $|E| = |V| - 1$.

Hinweis: Sie müssen nicht alle 30 Implikationen zeigen, es reicht schon, wenn die gezeigten Implikationen einen "stark zusammenhängenden Graph" bilden.

Aufgabe 6. (Multiple Choice)

(Es darf mehrere, oder gar keine passenden Antworten geben. Die Antworten müssen nicht begründet werden.)

a. Für welche untenstehenden g gilt $g = \mathcal{O}(x \cdot \ln x)$? (Man betrachte $x \to \infty$)

   (a) $g(x) = x^2$
   (b) $g(x) = \log_{2018}(x)$
   (c) $g(x) = \ln^{2018}(x)$
   (d) $g(x) = 0.2018^x$

b. Welche der untenstehenden Algorithmen haben polynomielle Laufzeit (bzgl. Eingabegröße)?

   (a) Breitesnuche in einem Graphen
   (b) Der Euklidische Algorithmus
   (c) Das Sieb des Erathosthenes

Aufgabe 7. (Richtig oder falsch? Begründen Sie!)

a. Die Funktion $f(x) = 1 + 2x - \frac{1}{1+x}$ ist nicht überall gut konditioniert.

b. Das maximale Element in einer endlichen Zahlenmenge kann in $o(n)$ bestimmt werden, wobei n die Kardinalität der Menge bezeichne.

c. Sei $G = (V, E)$ ein einfacher, ungerichteter Graph mit mindestens 2 Knoten. Es gibt zwei verschiedene Knoten $v, w \in V$ mit $\delta(v) = \delta(w)$.

d. Man kann die Zusammenhangskomponenten eines ungerichteten Graphen in $O(m + n)$ Zeit bestimmen, wobei n die Anzahl der Knoten und m die Anzahl der Kanten bezeichne.

e. Ein stark zusammenhängender gerichteter Graph enthält einen Kreis.