Einführung in die Grundlagen der Numerik

Wintersemester 2017/2018
Prof. Dr. C. Burstedde
J. Holke

Übungsblatt 1.

Abgabe am **Dienstag, 24.10.2017**.

Aufgabe 1. $(5+5=10$ Punkte$)$

Es seien $\mathbb{V}$ ein Hilbertraum, $\mathbb{V}_n \subset \mathbb{V}$ ein endlich dimensionaler Unterraum, sowie $f, y \in \mathbb{V}$. Sei $P_n\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}_n$ der othogonale Projektor. Gesucht sei $u \in y + \mathbb{V}_n$, so dass

$$u = \operatorname*{argmin}_{v \in y+\mathbb{V}_n} \|v - f\|. \tag{1}$$

Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) $u = y + P_n(f-y)$ ist eine gesuchte Lösung und sie ist eindeutig (Gleichung (1.1.4) aus der Vorlesung).

b) Es sei $u' \in y + \mathbb{V}_n$, so dass $\langle u' - f, v\rangle = 0$ für alle $v \in \mathbb{V}_n$. Hieraus folgt, dass u' die gesuchte Lösung ist.

Aufgabe 2. (10 Punkte)

Betrachte den Raum der $n \times n$ Matrizen über $\mathbb{R}^n$. Es sei $\|.\|_2$ die von der euklidischen Norm induzierte Matrixnorm, d.h.

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2. \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass für eine invertierbare symmetrische Matrix A gilt:

$$\|A\|\|A^{-1}\| = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}, \tag{3}$$

wobei $\lambda_{\max}$ und $\lambda_{\min}$ der betragsmäßig größte und kleinste Eigenwert von A sind.
Hinweis: Ist U orthogonal, dann gilt $\|Ux\|_2 = \|x\|_2$.

Aufgabe 3. $(3+7=10$ Punkte$)$

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie eine Singulärwertzerlegung $A = U\Sigma V^T$ an.

b) Für $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ sei $B = U\Sigma V^T$ eine Singulärwertzerlegung von B mit

$$\Sigma = \operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{m\times n} \text{ mit } \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0.$$

Zeigen Sie, dass für jedes B

$$\sigma_1 = \max_{y\in\mathbb{R}^m, x\in\mathbb{R}^n} \frac{y^T B x}{\|y\|_2\|x\|_2}.$$

Programmieraufgabe 1. $(3 + 3 + 3 + 1 = 10$ Punkte)

Auf dem Raum der stetigen Funktionen $f\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ betrachten wir das folgende Skalarprodukt:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f g \, dx. \tag{4}$$

Ferner sei $n \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{P}_{n-1}$ der Raum aller Polynome von Grad kleiner n. Sei $[\Phi] = [x^0, x^1, \dots, x^{n-1}]$ die monomiale Basis von $\mathcal{P}_{n-1}$.

a) Implementieren Sie die Simpsonregel, um das Integral

$$\int_0^{2\pi} f g \, dx \tag{5}$$

für zwei Funktionen $f, g\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ zu berechnen.
Die Funktion sollte zwei Funktionszeiger als Argumente akzeptieren und ihre Deklaration sollte so aussehen:

```
double simpson_quadratur (double (*f) (double),
                          double (*g) (double));
```

b) Um die Funktion $h(x) = \sin(x + \pi/8)$ zu projizieren, berechnen Sie mit Hilfe von (a) den Vektor $\underline{f} = [\langle h, x^i \rangle]_{i=0}^{n-1}$.

c) Stellen Sie nun die Gram-Matrix zu $[\phi]$ auf. Nutzen Sie auch hierzu den Aufgabenteil (a).

d) Vergleichen Sie für verschiedene Werte von n die Gram-Matrix aus Teil (c) mit der Hilbertmatrix. Was fällt Ihnen auf? (mündlich)

Die Bearbeitung erfolgt in Zweiergruppen.
Abgabe innerhalb der Woche 30.10.–03.11.2017 in den beiden CIP-Pools.
Bitte tragen Sie sich rechtzeitig im CIP-Pool Endenicher Allee in die Abgabeliste für diese Vorlesung ein.