Einführung in die Grundlagen der Numerik

Wintersemester 2017/2018
Prof. Dr. C. Burstedde
J. Holke

Übungsblatt 12.

Abgabe am **Dienstag, 23.01.2018**.

Aufgabe 1. (10 Punkte)

Seien $n \geq 0$ und x_i, ω_i, $0 \leq i \leq n$ die Stützstellen und Gewichte der Gauß-Legendre-Quadratur zur Bestimmung von

$$\int_a^b f(x)\,dx. \tag{1}$$

Analog seien $\tilde{x}_i$ und $\tilde{\omega}_i$, $0 \leq i \leq n$, die Stützstellen und Gewichte der Quadratur zur Bestimmung von

$$\int_c^d f(x)\,dx. \tag{2}$$

Leiten Sie Formeln zur Bestimmung von $\tilde{x}_i$ und $\tilde{\omega}_i$ aus den x_i und ω_i her.

Aufgabe 2. ($8 + 2 = 10$ Punkte)

Gegeben Sei das uneigentliche Integral

$$\mathcal{I}^{e^{-x^2}}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-x^2}\,dx, \tag{8}$$

das durch eine Gaußquadratur mit $n+1$ Stützstellen approximiert werden soll. Die Orthogonalpolynome zur Gewichtsfunktion $\omega(x) = e^{-x^2}$ über $\mathbb{R}$ sind die Hermite–Polynome.

a) Bestimmen Sie die Stützpunkte und Gewichte der Gauß-Hermite-Quadratur für $n = 0$ und $n = 1$.

b) Zeigen Sie, dass die skalierten Hermitepolynome

$$\tilde{H}_i(t) := 2^{-i}H_i(t) \tag{9}$$

die Rekursionsformel

$$\tilde{H}_{i+1}(t) = t\tilde{H}_i(t) - \frac{i}{2}\tilde{H}_{i-1}(t) \tag{10}$$

erfüllen.

Aufgabe 3. (10 Punkte)

Sei S das Dreieck mit Eckpunkten $(0,0), (1,0), (0,1)$ und $K\colon C(S) \to \mathbb{R}$ mit $0 < t_0 < t_1 < 1$ definiert durch

$$K(f) := \frac{1}{6}\Big(f(t_0,t_0) + f(t_1,t_0) + f(t_0,t_1)\Big). \tag{11}$$

Sei $\Pi_2^2 := \big\{(x,y) \mapsto \sum_{0\leq i+j\leq 2} a_{ij}x^iy^j \;\big|\; a_{ij} \in \mathbb{R}\big\}$. Zeigen Sie:

$$K(p) = \int_S p(x,y)\,dx\,dy \quad \text{für alle } p \in \Pi_2^2 \quad \Leftrightarrow \quad t_0 = 1/6 \text{ und } t_1 = 2/3. \tag{12}$$

Aufgabe 4. (10 Punkte)

Es seien ω_i, x_i, $0 \leq i \leq n$ die Stützstellen und Gewichte der zwei-dimensionalen Gauß-Legendre-Quadratur auf $[-1,1]^2$. Es sei D eine Drittelkreisscheibe mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Radius 1. Bestimmen Sie, in Abhängigkeit von x_i und ω_i, für beliebiges n die Stützstellen $\tilde{x}_i$ und Gewichte $\tilde{\omega}_i$ der Gaußquadraturformel zur Berechnung von

$$\int_D f(x)\, dx. \tag{13}$$

Hinweis: Zur Anwendung des Transformationssatzes genügt es, wenn die Transformationsfunktion auf dem Inneren von D invertierbar ist.

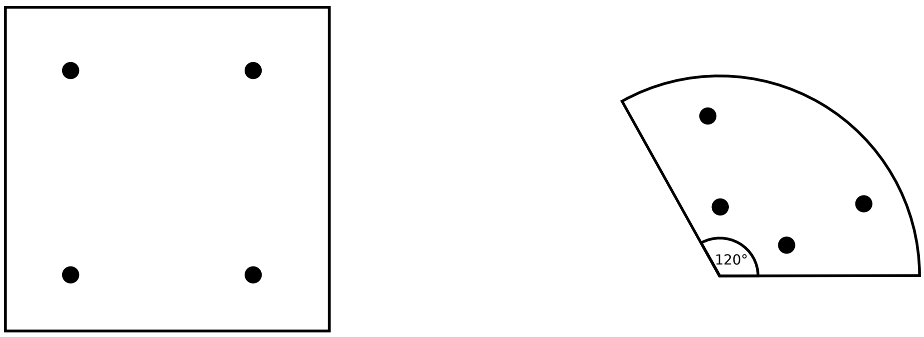

Abbildung 1: Skizze für den Fall $n = 1$. Zu Bestimmen ist die Position der Stützstellen $\tilde{x}_i$ (rechts) aus den x_i (links), sowie die Gewichte $\tilde{\omega}_i$ aus den Gewichten $\tilde{\omega}_i$.