Einführung in die Grundlagen der Numerik

Wintersemester 2017/2018
Prof. Dr. C. Burstedde
J. Holke

UNIVERSITÄT BONN

Übungsblatt 13.

Abgabe am **Dienstag, 30.01.2018**.

Aufgabe 1. Es sei

$$Q_n^{3D}(f) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} f(x_i, x_j, x_k)\mathfrak{w}_i\mathfrak{w}_j\mathfrak{w}_k \tag{1}$$

die 3D Gauß-Legendre-Quadratur zur Approximation von

$$\mathcal{I}(f) = \int_{[-1,1]^3} f(x)\,dx. \tag{2}$$

Zeige Sie, dass

$$|Q_n^{3D}(f) - \mathcal{I}(f)| \leq 6\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}}(4en)^{-2n}\left(1 + \mathcal{O}(n^{-1})\right)C(f) \tag{3}$$

mit

$$C(f) = \max_{(x,y,z)\in[-1,1]^3} \max\left\{\left|\frac{\partial^{2n+2}}{\partial x^{2n+2}}f(x,y,z)\right|, \left|\frac{\partial^{2n+2}}{\partial y^{2n+2}}f(x,y,z)\right|, \left|\frac{\partial^{2n+2}}{\partial z^{2n+2}}f(x,y,z)\right|\right\}. \tag{4}$$

Aufgabe 2. Es seien $a \leq x_0 < \cdots < x_i < \cdots < x_n \leq b$. Ferner sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal stetig differenzierbar und es sei g ein Polynom n-ten Grades mit

$$f(x_i) = g(x_i), \text{ für alle } 0 \leq i \leq n. \tag{5}$$

Zeigen Sie folgende Aussage über den Approximationsfehler: Für jedes $x \in [a,b]$ existiert ein $\xi \in [a,b]$, so dass

$$f(x) - g(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i). \tag{6}$$

Aufgabe 3. Wir betrachten folgende Quadraturvorschrift zur Approximation des Integrals

$$\int_0^1 f\,dx \tag{8}$$

einer Funktion $f \in C_1([0,1])$:

$$Q(f) = \omega_0 f(0) + \omega_1 f'(0) + \omega_2 f(1) + \omega_3 f'(1). \tag{9}$$

a) Bestimme die Gewichte ω_i, so dass $I(f)$ exakt ist für Polynome von Grad 3.

b) Wie transformieren sich die Gewichte aus Teil a), wenn wir statt $[0,1]$ das Intervall $[a,b]$ verwenden?

Aufgabe 4. a) Zeigen Sie, dass

$$L_n := \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n) \tag{10}$$

ein Polynom n-ten Grades ist. Diese Polynome heißen Laguerre-Polynome.

b) Zeigen Sie, dass die Laguerre-Polynome orthogonal sind bezüglich

$$\langle f, g \rangle = \int_0^\infty e^{-x} f(x) g(x)\, dx. \tag{11}$$

c) Zeigen Sie, dass die Laguerre-Polynome die folgende Rekursion erfüllen:

$$(n+1) L_{n+1}(x) = (2n+1-x) L_n(x) - n L_{n-1}(x). \tag{12}$$