Einführung in die Grundlagen der Numerik

Wintersemester 2017/2018
Prof. Dr. C. Burstedde
J. Holke

UNIVERSITÄT BONN

Übungsblatt 2.

Abgabe am **Donnerstag, 02.11.2017**.

Aufgabe 1. (10 Punkte)

Wir betrachten das Minimierungsproblem (1.1.1) aus der Vorlesung. Es sei $[\Phi] = [\phi_1, \ldots, \phi_n]$ eine Basis von $V_h \subset \mathbb{V}$. Lösen Sie das Minimierungsproblem analytisch, d.h. betrachten Sie die stetig differenzierbare Funktion

$$F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \tag{1}$$

$$\underline{u} \mapsto \|f - ([\Phi]\underline{u} + y)\|^2 \tag{2}$$

und untersuchen Sie sie auf lokale Minima.

Aufgabe 2. $(5 + 3 + 2 = 10$ Punkte)

Es sei $J\colon \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ das quadratische Funktional

$$J(v) = \frac{1}{2}\langle v, v\rangle - \langle f, v\rangle. \tag{3}$$

a) Bestimmen Sie v_0 und c, so dass

$$J(v) = \frac{1}{2}\langle v - v_0, v - v_0\rangle + c. \tag{4}$$

b) Wie lässt sich die Menge der $v \in \mathbb{V}$ mit $J(v) = d$ anhand von v_0, c und d geometrisch beschreiben?

c) Sei $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$ und $f = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Skizzieren Sie die Menge $\{v \in \mathbb{R}^2 | J(v) = 0\}$ für das nicht-euklidische Skalarprodukt $\langle u, v\rangle = u_1 v_1 + \frac{1}{2} u_2 v_2$.

Aufgabe 3. $(4 + 4 + 2 = 10$ Punkte)

Die Lösungsmenge der quadratischen Gleichung

$$\frac{1}{4}\left(15x^2 + 2\sqrt{3}xy + 13y^2\right) = 10 \tag{5}$$

beschreibt eine Ellipse um den Ursprung.

a) In welchem Winkel stehen die Hauptachsen zu der X- bzw. Y-Achse?

b) Bestimmen Sie die Länge der Hauptachsen.

c) Skizzieren Sie die Ellipse.

Aufgabe 4. $(5 + 5 = 10$ Punkte)

Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie eine Singulärwertzerlegung $A = U\Sigma V^T$.

b) Berechnen Sie die Pseudoinverse $A^\dagger$ von A und bestimmen Sie eine Lösung x^* des linearen Ausgleichsproblems $x^* = \operatorname{argmin} \|Ax - b\|_2$. Ist x^* eindeutig bestimmt?