Einführung in die Grundlagen der Numerik

Wintersemester 2017/2018
Prof. Dr. C. Burstedde
J. Holke

UNIVERSITÄT BONN

Übungsblatt 3.

Abgabe am **Dienstag, 07.11.2017**.

Aufgabe 1. (10 Punkte)

Sei $P\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, so dass $\langle Pf - f, v\rangle = 0$ für alle $f \in \mathbb{C}^n$ und $v \in \operatorname{im}(P)$. Zeigen Sie, dass daraus folgt, dass P ein Orthoprojektor auf $\operatorname{im}(P)$ ist.

Aufgabe 2. ($5 + 5 = 10$ Punkte)

Es sei $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $m \geq n$ mit $\operatorname{rang}(A) = n$.

a) Seien $A = Q_1R_1 = Q_2R_2$ zwei QR-Zerlegungen von A. Zeigen Sie, dass eine unitäre Diagonalmatrix D existiert mit
$$Q_1 = Q_2D^*. \tag{7}$$

b) Zeigen Sie, dass zu gegebenem b die Lösung x des Systems
$$Rx = Q^*b \tag{8}$$
unabhänging von der konkreten Zerlegung $A = QR$ ist.

Aufgabe 3. (10 Punkte)

Berechnen Sie die mittels QR-Zerlegung von A das $x \in \mathbb{R}^2$ so, dass $\|Ax - b\|_2^2$ minimal wird mit
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}. \tag{13}$$
Wie groß ist die Norm des Residuums?

Programmieraufgabe 1. ($7 + 3 = 10$ Punkte)

a) Implementieren Sie die QR-Zerlegung für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mithilfe der Householdertransformation. Wenn das Programm feststellt, dass der Rang von A kleiner als n ist, soll es abbrechen. Die Matrix Q wird nicht aufgestellt: Es reicht, die Householder-Vektoren zu berechnen und zu speichern.

b) Testen Sie Ihren Algorithmus anhand der Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ \sqrt{12} & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Die Bearbeitung erfolgt in Zweiergruppen.
Abgabe Montag 13.11.17 oder Dienstag 14.11.17 im CIP-Pool Wegelerstrasse.
Bitte tragen Sie sich rechtzeitig im CIP-Pool Wegelerstrasse in die Abgabeliste für diese Vorlesung ein.