Einführung in die Grundlagen der Numerik

Wintersemester 2017/2018
Prof. Dr. C. Burstedde
J. Holke

UNIVERSITÄT BONN

Übungsblatt 4.

Abgabe am **Dienstag, 14.11.2017**.

Aufgabe 1. ($4+3+3=10$ Punkte)

Gegeben sei eine diagonalisierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit den Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Es sei v_1 ein Eigenvektor zu λ_1.

a) Finde einen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$, so dass $P_v e_1 = \alpha v_1$ für die zugehörige Spiegelungsmatrix P_v und ein geeignetes $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass A durch

$$P_v A P_v = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b^T \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

auf Blockstruktur transformiert werden kann, wobei $b \in \mathbb{R}^{n-1}$ und $A_1 \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$.

c) Zeigen Sie, dass die Matrix A_1 die Eigenwerte $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ besitzt.

Aufgabe 2. ($5+5=10$ Punkte)

a) Bestimmen Sie eine QR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{3}} & \frac{6}{5\sqrt{3}} & \frac{14}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{3}{5} & 0 \\ \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{9\sqrt{2}}{5\sqrt{3}} & \frac{7\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ -2\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \end{pmatrix} \tag{2}$$

mittels Givens-Rotationen.

b) Bestimmen Sie alle reellen Eigenwerte, die zugehörigen Eigenvektoren und die Determinante der Matrizen

$$Q_v = I - 2\frac{vv^T}{v^Tv} \qquad \text{(Householder-Reflektion)},$$
$$G_\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \qquad \text{(Givens-Rotation)},$$

wobei $v \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ und $\phi \in \mathbb{R}$ sind.

Aufgabe 3. (10 Punkte)

Gegeben sei die Monombasis $\{1, x, x^2, x^3\}$ des Polynomraumes $\mathcal{P}_3([-1,1])$ auf dem Intervall $(-1,1)$. Bestimmen Sie eine bezüglich des Skalarproduktes $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$ orthonormale Basis mit Hilfe des Gram-Schmidt Verfahrens.

Aufgabe 4. $(6 + 2 + 2 = 10$ Punkte)

Das k-te Tschebyscheff-Polynom ist für $t \in [-1, 1]$ definiert durch $T_k(t) := \cos(k \arccos(t))$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Es gilt $T_k(t) = \frac{1}{2}\left(t + \sqrt{t^2 - 1}\right)^k + \frac{1}{2}\left(t - \sqrt{t^2 - 1}\right)^k$ für $t \in [-1, 1]$ und mit dieser Identität kann T_k auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt werden. Ferner ist T_k ein Polynom vom Grad k. (Hinweis: Zeigen Sie induktiv die Rekursionsformel $T_{k+1}(t) = 2tT_k(t) - T_{k-1}(t)$ für beide Varianten von T_k und folgern Sie daraus die Gleichheit.)

b) Das Tschebyscheff-Polynom T_k besitzt k einfache Nullstellen, die allesamt im Intervall $[-1, 1]$ liegen.

c) Das Tschebyscheff-Polynom T_k besitzt auf $[-1, 1]$ genau $k + 1$ Extrema.