Einführung in die Grundlagen der Numerik

Wintersemester 2017/2018
Prof. Dr. C. Burstedde
J. Holke

Übungsblatt 6.

Abgabe am **Dienstag, 28.11.2017**.

Aufgabe 1. $(6 + 2 + 2 = 10$ Punkte)

a) Für das CG-Verfahren aus der Vorlesung gilt

$$\beta_k = \frac{\langle r^{(k+1)}, r^{(k+1)} \rangle}{\langle r^{(k)}, r^{(k)} \rangle}, \tag{1}$$

für $k > 0$ und $\beta_0 = -\frac{\langle r^{(1)}, r^{(1)} \rangle}{\langle r^{(0)}, r^{(0)} \rangle}$.

b) Unter welchen Voraussetzungen ändert sich die Iterierte $x^{(k)}$ nicht mehr? Formulieren Sie ein Abbruchkriterium des CG-Verfahrens mit Hilfe der Residuuen.

c) In der Praxis verwendet man als Abbruchkriterium oft den relativen Abfall des Residuums $\frac{\|r^{(k+1)}\|}{\|r^{(0)}\|}$. Zeigen Sie, dass dies genau $\sqrt{|\beta_k \beta_{k-1} \cdots \beta_0|}$ entspricht.

Aufgabe 2. $(5 + 5 = 10$ Punkte)

a) Verwenden Sie das CG-Verfahren, um eine Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ definiert durch

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

zu bestimmen. Starten Sie mit $x^{(0)} = (1, 0, 1)^T$.

b) Geben Sie eine symmetrisch positiv definite 3×3 Matrix A, eine rechte Seite b und einen Startwert $x^{(0)}$ an, so dass $x^* = x^{(2)} \neq x^{(1)}$.

Aufgabe 3. $(5 + 5 = 10$ Punkte)

Es sei A symmetrisch und positiv semidefinit mit Rang $k < n$. Wir betrachten die Gleichung $Ax = b$.

a) Es sei $b \in \operatorname{Bild} A$. Liefert das CG-Verfahren die korrekte Lösung? Wenn ja, nach wie vielen Schritten?

b) Es sei $b \notin \operatorname{Bild} A$. Zeigen Sie, dass das CG-Verfahren die Lösung der Normalengleichung berechnet.

Aufgabe 4. (10 Punkte)

Wir betrachten das Gleichungssystem $Ax = b$ mit symmetrisch, positiv definierter $n \times n$ Matrix A und wenden das CG-Verfahren zur Lösung an. Es sei ferner $k \leq n$, so dass $r^{(k)} \neq 0$. Zeigen Sie, dass $q^{(0)}, \ldots, q^{(k)} \neq 0$.