Einführung in die Grundlagen der Numerik

Wintersemester 2017/2018
Prof. Dr. C. Burstedde
J. Holke

UNIVERSITÄT BONN

Übungsblatt 9.

Abgabe am **Dienstag, 19.12.2017**.

Aufgabe 1. (10 Punkte)

Beweisen Sie den Satz von Courant-Fischer. Es sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitesch mit Eigenwerten

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \tag{1}$$

und dazugehörigen Eigenvektoren v_i. Weiterhin sei $\{z_1, \dots, z_n\}$ ein Orthonormalsystem des $\mathbb{C}^n$ und $\mathcal{Z}_k = \operatorname{Spann}\{z_1, \dots, z_k\}$. Dann gilt für alle $1 \leq k \leq n$

$$\min_{x\neq 0, x\in\mathcal{Z}_k} \frac{x^* A x}{x^* x} \leq \lambda_k. \tag{2}$$

Es gilt Gleichheit, wenn $\mathcal{Z}_k = \operatorname{Spann}\{v_1, \dots, v_k\}$.

Aufgabe 2. (10 Punkte)

Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften des Lanczos-Verfahrens.

a) Das Lanczos-Verfahren erzeugt angewendet auf die Matrix $A - \sigma I$ für beliebiges $\sigma \in \mathbb{C}$ bei gleichem Startvektor q_0 stets dieselben Vektoren w_i.

b) Das Lanczos-Verfahren erzeugt angewendet auf die Matrix A mit Startvektor q_0 dieselbe Tridiagonalmatrix T wie für die Matrix Q^*AQ mit Startvektor Q^*q_0, solange Q unitär ist.

Was folgt aus (b) für die theoretische Analyse des Verfahrens?

Programmieraufgabe 1. (20Punkte)

a) Verbessern Sie die Quadraturformel aus Zettel 1, indem Sie die iterierte Simpsonregel verwenden. Hierzu wird das zu integrierende Interval $[0, 2\pi]$ in N Teilintervalle $[x_i, x_{i+1}]_{i=0}^{N-1}$ zerlegt, mit $x_0 = 0$, $x_N = 2\pi$ und $x_{i+1} - x_i = \frac{2\pi}{N} =: h$. Wendet man nun auf jedem Teilinterval die Simpsonregel an, so erhält man insgesamt

$$\int_0^{2\pi} f \, dx \approx \frac{h}{6}\left(f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) + f(x_N) + 4\sum_{i=1}^{N} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)\right) \tag{3}$$

b) Stellen Sie mit Hilfe von a) die Grammatrizen G und $\hat{G}$ bezüglich der Monombasis und der Legendrebasis auf sowie die rechten Seiten f und $\hat{f}$ (siehe Zettel 1 und Zettel 5).

c) Implementieren Sie für das PCG-Verfahren den Vorkonditionierer von Zettel 8, Aufgabe 2b).

d) Lösen Sie die Gleichungssysteme $Gx = f$ und $\hat{G}x = \hat{f}$ jeweils mit Hilfe der QR-Zerlegung und des PCG-Verfahrens (mit relativer Genauigkeit 10^{-6}). Vergleichen Sie die Ergebnisse und die Laufzeiten (für $n \gg 1$). Untersuchen Sie auch verschiedene Wahlen von N.

Die Bearbeitung erfolgt in Zweiergruppen.
Abgabe Montag 08.01.18 oder Dienstag 09.01.18 im CIP-Pool Wegelerstrasse.
Bitte tragen Sie sich rechtzeitig im CIP-Pool Wegelerstrasse in die Abgabeliste für diese Vorlesung ein.