

Aufgabe 4: Betrachten Sie die Folge

$$a_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

- i) Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt ist.
- ii) Nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass hat $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ also eine konvergente Teilfolge. Geben Sie eine solche und ihren Grenzwert an.

LÖSUNG:

i)

$$|a_n| = \left|1 + \frac{1}{n}\right| \leq 2$$

ii)

$$a_{2k} = (-1)^{2k} \left(1 + \frac{1}{2k}\right) = 1 + \frac{1}{2k} \rightarrow 1 \quad \text{für } k \rightarrow \infty$$

(vgl. Grenzwertsätze)

Aufgabe 5: Zeigen Sie, dass die Reihe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{i}}$$

divergiert.

LÖSUNG: Die Reihe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{i}}$ ist nach unten beschränkt durch die harmonische Reihe $(\tilde{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\tilde{a}_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$, d. h. es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{i}} \geq \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = \tilde{a}_n.$$

Damit divergiert $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.