Aufgabe 8: Das Volumen eines Kegels mit kreisförmiger Grundfläche ist gegeben durch

$$V(r,h) = \frac{\pi}{3} r^2 h.$$

Dabei ist r der Radius der Grundfläche und h die Höhe des Kegels.
Um wieviel Prozent ändert sich das Volumen V (bis auf Terme höherer Ordnung), wenn r und h um je ein Prozent vergrößert werden?

LÖSUNG:

$$\frac{\partial V}{\partial r}(r,h) = \frac{2}{3}\pi r h, \qquad \frac{\partial V}{\partial h}(r,h) = \frac{\pi}{3} r^2$$

$$\begin{aligned}
&\frac{V(r+0.01r, h+0.01h) - V(r,h)}{V(r,h)} \\
= \;& \frac{\frac{\partial V}{\partial r}(r,h)0.01r + \frac{\partial V}{\partial h}(r,h)0.01h + o(0.01r, 0.01h)}{V(r,h)} \\
= \;& \frac{\frac{2}{3}\pi r h \cdot 0.01r + \frac{\pi}{3} r^2 \cdot 0.01h + o(0.01r, 0.01h)}{\frac{\pi}{3} r^2 h} \\
= \;& 0.03 + \frac{o(0.01r, 0.01h)}{\frac{\pi}{3}{}^2 h}
\end{aligned}$$

Bis auf Terme höherer Ordnung vergrößert sich das Volumen also um 3 Prozent, wenn man r und h um je ein Prozent vergrößert.

Alternativ:
Eine andere Möglichkeit die relative Änderung des Volumens V zu berechnet ist

$$\begin{aligned}
&\frac{V(r+0.01r, h+0.01h) - V(r,h)}{V(r,h)} \\
= \;& \frac{V(r(1+0.01), h(1+0.01)) - V(r,h)}{V(r,h)} \\
= \;& \frac{V(r(1.01), h(1.01)) - V(r,h)}{V(r,h)} \\
= \;& \frac{\frac{\pi}{3} r^2 (1.01)^2 h^2 (1.01) - \frac{\pi}{3} r^2 h}{\frac{\pi}{3} r^2 h} \\
= \;& \frac{\frac{\pi}{3} r^2 h (1.01)^3 - \frac{\pi}{3} r^2 h}{\frac{\pi}{3} r^2 h} \\
= \;& 1.01^3 - 1 \\
= \;& 0.030301.
\end{aligned}$$

Vergrößert man r und h um je ein Prozent, so vergrößert sich das Volumen V um genau 3.0301 Prozent.

Aufgabe 9: Berechnen Sie die Tangente $y = mx + n$ an die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

an den Stellen $x = 1$ und $x = 4$.

LÖSUNG: Zunächst berechnen wir die Ableitung

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\,.$$

Für $x = 1$ ergibt sich $m = f'(1) = -1$. Damit die Funktion dieser Steigung die Funktion $f(x)$ am Punkt $x = 1$ berührt, also eine Tangente ist, muss

$$-1 + n = 1 = f(1)$$

gelten. Durch Lösen der Gleichung nach n erhält man $n = 2$ und somit die Tangente

$$y = -x + 2$$

am Punkt 1.
Analog erhält man die Tangente

$$y = -\frac{1}{16}x + \frac{1}{2}$$

am Punkt 4.