Aufgabe 14: Vereinfachen Sie die folgenden Summen:

a)
$$\sum_{i=1}^{10}(a_i - a_{i+1}),$$

b)
$$\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{10} a_{ij} - \sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{5} a_{i,2j}.$$

Aufgabe 15: Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$;

b) $n! \geq 2^{n-1}$.

Aufgabe 16: Die Zahlenfolge (a_n) sei rekursiv definiert durch

$$a_0 = 1, \qquad a_n = a_{n-1} + 2n + 1 \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Man gebe eine explizite Formel für das allgemeine Glied der Folge an und beweise diese Formel!

Aufgabe 17: Berechnen Sie den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

a) $a_n := \frac{-7n^2+3n-1}{5n^2+5}$;

b) $a_n := \frac{3n^3+n-2}{(2n+\sqrt{n})^3}$;

c) $a_n := (1 + \frac{1}{n^2})^n$;

Tipp: Wenden Sie die Bernoullische Ungleichung einmal auf a_n und einmal auf $\frac{1}{a_n}$ an und zeigen Sie damit, dass

$$a_n \geq 1 + \frac{1}{n}$$

und

$$a_n \leq 1 + \frac{n}{n^2 - n + 1}$$

gelten.

Berechnen Sie die Grenzwerte dieser beiden Folgen.