Aufgabe 37: a) Gegeben seien die Vektoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 13 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, daß diese vier Vektoren des $\mathbb{R}^3$ linear abhängig sind.
b) Bilden die drei Vektoren

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

eine Basis des $\mathbb{R}^3$? Falls nicht, so geben Sie bitte einen Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ an, der sich nicht als Linearkombination dieser drei Vektoren darstellen läßt.
Tipp: Berücksichtigen Sie die Eigenschaften des Kreuzproduktes $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ zweier Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$.
c) Sind die drei Vektoren

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig? Bilden Sie eine Basis des $\mathbb{R}^3$? Wie lauten die Koordinaten des Vektors

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bezüglich dieser Basis?

Aufgabe 38: Welche der folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^3$ sind Untervektorräume?

a) $\{(1, x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$	ja ☐	nein ☐
b) $\{(x, x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$	ja ☐	nein ☐
c) $\{(x, 2x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\}$	ja ☐	nein ☐
d) $\{(x_1, x_2, x_3) \mid 2x_1 + x_2 = 5x_3\}$	ja ☐	nein ☐
e) $\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + 2x_2 = 7\}$	ja ☐	nein ☐

Aufgabe 39: Es sei $\mathcal{P}^k = \text{span}\{1, t, t^2, \cdots, t^k\}$ der Vektorraum der Polynome, deren Grad höchstens $k (\in \mathbb{N})$ sei. Zeigen Sie, dass

$$U := \{p \in \mathcal{P}^k \mid p(5) = 0\ ,\ p(7) = 0\}$$

ein Unterraum von $\mathcal{P}^k$ ist.

Aufgabe 40: a) Gegeben seien die folgenden drei Punkte im $\mathbb{R}^3$:

$$P_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die Ebene E, welche durch diese drei Punkte geht, in Parameterform, d.h. in der Form

$$E = \{x + \lambda r + \mu q \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\},$$

mit $x, r, q \in \mathbb{R}^3$ an.

b) Berechnen Sie mit Hilfe des Kreuzproduktes eine Darstellung der Ebene der Form $E = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = d\}$.