Aufgabe 58: Lösen Sie folgende inhomogene Gleichungssysteme mit Hilfe des Gauß'schen Algorithmus. Bestimmen Sie eine Basis von Ker($\mathbf{A}$) und Bild($\mathbf{A}$), wenn $\mathbf{A}$ die Koeffizientenmatrix der Gleichungssysteme bezeichnet:

$$a)\quad \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 &= -1 \end{aligned} \qquad b)\quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 &= -1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 &= \lambda \end{aligned}$$

Aufgabe 59: Wir betrachten ein Parallelepiped $\mathbf{P}$, welches von den drei Vektoren $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ aufgespannt wird. Zusätzlich ist eine affine Abblidung

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

gegeben. Dann ist $f(\mathbf{P})$ wieder ein Parallelepiped (Warum?).

a) Geben Sie die drei Vektoren an, die das Parallelepiped $f(\mathbf{P})$ aufspannen.

b) Zeigen Sie, dass für das Volumen des Parallelepipeds $f(\mathbf{P})$ gilt

$$\mathrm{vol}\, f(\mathbf{P}) = |\det \mathbf{A}| \cdot |\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})| = |\det \mathbf{A}| \cdot \mathrm{vol}(\mathbf{P}).$$

c) Berechnen Sie für

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

das Volumen von $\mathbf{P}$ vol($\mathbf{P}$), sowie das Volumen von $f(\mathbf{P})$ vol($f(\mathbf{P})$). Berechnen Sie vol($f(\mathbf{P})$) einmal mit Hilfe der im vorigen Aufgabenteil angegeben Formel, als auch auf direktem Weg, indem sie zuerst $f(\mathbf{u})$, $f(\mathbf{v})$ und $f(\mathbf{w})$ berechnen.

Aufgabe 60: Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrizen

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 & 10 \\ 3 & 0 & 7 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & -1 & 10 \end{pmatrix}, \quad \text{b)} \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{c)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \text{d)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 8 & 14 & 20 \\ 4 & 11 & 20 & 30 \end{pmatrix},$$

$$\text{Zusatzaufgabe e)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 8 & 11 & 14 \\ 3 & 8 & 14 & 20 & 26 \\ 4 & 11 & 20 & 30 & 40 \\ 5 & 14 & 26 & 40 & 55 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 61: Rechnen Sie nach, dass sich die Determinante einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{3,3}$ mit folgender Regel berechnen lässt:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$