Klausur zum Modul Ingenieurmathematik II (B22) **14. März 2017**
für den Bachelorstudiengang Geodäsie und Geoinformation

In der Klausur können 10 Punkte pro Aufgabe, also insgesamt 100 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen sind mindestens 42 Punkte erforderlich.

Prüfer: Dr. M. Lenz, Prof. Dr. M. Rumpf

Klausurdauer: 180 Minuten

Bitte Namen, Vornamen und Matrikel-Nr. einsetzen.

Name: ....

Vorname: ....

Matrikel-Nr.: ....

Bitte Schlüsselwort (zur Veröffentlichung der Klausurergebnisse im Netz) eintragen:

Schlüsselwort: ....

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6
Punkte:						
Aufgabe:	7	8	9	10		$\sum$
Punkte:						

Gesamtzahl der Punkte Note Datum Unterschrift

_______________ _____ __________ _________________________

_______________ _____ __________ _________________________

Viel Erfolg!

Aufgabe 1: a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^1 (x+1)e^x \,\mathrm{d}x\,.$$

(5 Punkte)

b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{\sin(x)+1}\cos(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

(5 Punkte)

Lösung:

a)

b)

Aufgabe 2:

a) Lösen Sie $z^2 + 4z + 8 = 0$ für $z \in \mathbb{C}$. (3 Punkte)

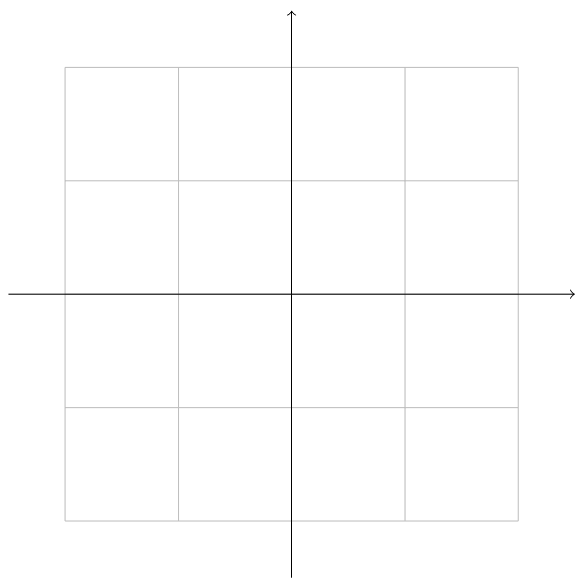
b) Lösen Sie $z^8 = 16$ für $z \in \mathbb{C}$. Wie viele Lösungen gibt es? Fertigen Sie eine Skizze an. (4 Punkte)

c) Sei $z = re^{i\phi} \in \mathbb{C}$. Geben Sie $\mathrm{Re}(z)$ und $\mathrm{Im}(z)$ abhängig von r und ϕ an. (3 Punkte)

Lösung:

a)

b)



c)

Aufgabe 3: Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \ln(x^2 + 1) + y^3 - 3y\,.$$

a) Bestimmen Sie die Menge der kritischen Punkte von f. (5 Punkte)

b) Klassifizieren Sie die kritischen Punkte von f nach Minima, Maxima oder Sattelpunkten. (5 Punkte)

Lösung:

a)

b)

Aufgabe 4: Lösen Sie mittels des QR-Verfahrens (und *nicht* unter Verwendung der Normalengleichung) das Ausgleichsproblem

$$\left\| \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 11 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ 17 \end{pmatrix} \right\|^2 \to \min!$$

Geben Sie die Minimalstelle (x, y) und das Quadrat des Residuums (den Wert der obigen quadrierten Norm an der Minimalstelle) an.

(10 Punkte)

Lösung:

Aufgabe 5:

a) Geben Sie den Transformationssatz an. (2 Punkte)

b) Wie lautet der Transformationssatz für Kugelkoordinaten? Geben Sie insbesondere die Determinante der Jacobimatrix an. (3 Punkte)

c) Berechnen Sie den Schwerpunkt der Achtelkugel $\mathcal{K}$, wobei

$$\mathcal{K} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ x, y, z \geq 0 \right\} .$$

(5 Punkte)

Lösung:

a)

b)

c)

Aufgabe 6: Sei

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_2}{x_1^2 + 1}\,.$$

a) Berechnen Sie den Gradienten und die Hessematrix von f. (2+3 Punkte)

b) Betrachten Sie eine beliebig oft differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Geben Sie die Formel für die Taylor-Entwicklung 2-ter Ordnung (d.h. mit Restglied 3-ter Ordnung) von f um dem Punkt $x \in \mathbb{R}^d$ an.

(2 Punkte)

c) Berechnen Sie die Taylor-Entwicklung zweiter Ordnung (d.h. mit Restglied dritter Ordnung) der Funktion f aus Teil a) um den Punkt $(x_1, x_2) = (0, 1)$.

(3 Punkte)

Lösung:

a)

b)

c)

Aufgabe 7: Sei

$$f(x) = \sin^2(x)\,.$$

a) Bestimmen Sie ein quadratisches Polynom p, das f in den Knoten $x_0 = 0$, $x_1 = \pi/2$ und $x_2 = \pi$ interpoliert. (6 Punkte)

b) Berechnen Sie eine Approximation des Integrals $\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x$ mit Hilfe einer numerischen Quadratur basierend auf den Knoten aus a). (4 Punkte)

Lösung:

a)

b)

Aufgabe 8: Berechnen Sie Länge und Richtung der Hauptachsen des durch

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 3x^2 + y^2 + 3z^2 + 2xz = 0\right\}$$

gegebenen Ellipsoids. (10 Punkte)

Lösung:

Aufgabe 9: Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ ein Kurve.
a) Geben Sie eine Formel zur Berechnung der Bogenlänge von γ an. (2 Punkte)

b) Geben Sie eine Formel zur Berechnung der Krümmung (mit Vorzeichen) von γ an. (2 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Betrachten Sie die Kurve

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in [a, b].$$

c) Geben Sie eine Formel zur Berechnung der Bogenlänge von γ in Abhängigkeit von f an. (2 Punkte)

d) Geben Sie eine Formel zur Berechnung der Krümmung (mit Vorzeichen) von γ in Abhängigkeit von f an. (2 Punkte)

e) Berechnen Sie die Kümmung von γ für $f(t) = t^2$. (2 Punkte)

Lösung:
a)

b)

c)

d)

e)

Aufgabe 10: Betrachte die durch

$$x(u,v) = \begin{pmatrix} \sqrt{u}\,\cos(v) \\ \sqrt{u}\,\sin(v) \\ \sqrt{u} \end{pmatrix}, \quad u \in [0,H], v \in [0,2\pi]$$

parametrisierte Fläche $\mathcal{M}$.

a) Berechnen Sie die Metrik.

(4 Punkte)

b) Geben Sie eine Formel zur Berechnung des Flächeninhalts von $\mathcal{M}$ an.

(2 Punkte)

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt von $\mathcal{M}$.

(2 Punkte)

d) Um welches geometrisches Objekt handelt es sich bei $\mathcal{M}$?

(2 Punkte)

Lösung:
a)

b)

c)

d)