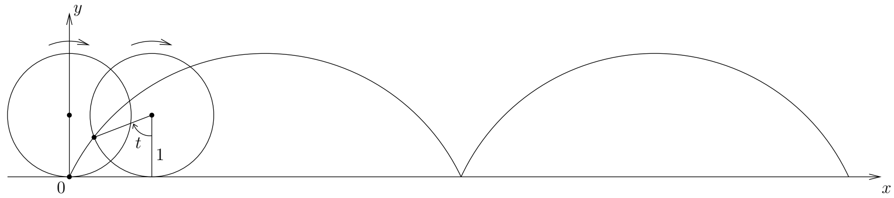
Aufgabe 2: Konstruieren Sie die Parametrisierung der abgebildeten Kurve. Diese entsteht, indem ein Kreis von Radius 1 gleichmäßig die x-Achse entlang rollt.



a) Geben Sie zunächst die Parametrisierung der Kurve an, die die Bewegung des Kreismittelpunktes beschreibt.

b) Geben Sie anschließend die Parametrisierung der Kurve an, die die Bewegung eines Punktes auf einem im Uhrzeigersinn rotierenden Kreis mit festem Mittelpunkt $(0,0)$ beschreibt.

c) Geben Sie die Parametrisierung der oben abgebildeten und beschriebenen Kurve an, indem sie die Lösungen aus Aufgabenteil a) und b) addieren.

d) Berechnen Sie den Betrag der Geschwindigkeit.

e) Bestimmen Sie die Länge der Kurve, die bei einer Umdrehung des Kreises entsteht.
Tipp: $\cos(t) = \cos^2(\frac{t}{2}) - \sin^2(\frac{t}{2})$

LÖSUNG:

a) Die Kurve, die die Bewegung des Kreismittelpunktes beschreibt, wird parametrisiert durch

$$\gamma_M(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Die Kurve, die die Bewegung eines Punktes auf einem im Uhrzeigersinn rotierenden Kreis mit festem Mittelpunkt $(0,0)$ beschreibt und im Punkt $(0,-1)$ startet, wird parametrisiert durch

$$\gamma_P(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix}.$$

c) Die Parametrisierung der oben abgebildeten Kurve ist gegeben durch

$$\gamma(t) = \gamma_M(t) + \gamma_P(t) = \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix}$$

d) Der Geschwindigkeitsvektor ist gegeben durch

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

und somit läßt sich der Betrag der Geschwindigkeit wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned}\|\dot{\gamma}(t)\| &= \sqrt{(1-\cos(t))^2+\sin^2(t)}\\ &= \sqrt{1-2\cos(t)+1}\\ &= \sqrt{2-2\cos(t)}\end{aligned}$$

e) Für eine Umdrehung des Kreises ist $t \in [0, 2\pi]$.

$$\begin{aligned}l(2\pi) &= \int_0^{2\pi} \|\dot{\gamma}(s)\|\,ds = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos(s)}\,ds\\ &= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos^2(\tfrac{s}{2})+\sin^2(\tfrac{s}{2})}\,ds\\ &= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{2\,\sin^2(\tfrac{s}{2})}\,ds\\ &= 2\int_0^{2\pi} \sin(\tfrac{s}{2})\,ds \quad (\sin(\tfrac{s}{2}) \geq 0 \text{ für } s \in [0,2\pi])\\ &= 2\left[-2\cos(\tfrac{s}{2})\right]_0^{2\pi}\\ &= 8\end{aligned}$$

Aufgabe 3: Sie befinden sich auf der Bonner Hofgartenwiese an der Position $50°42'57''N, 7°6'16''O$ in einer Höhe von 64 Metern. Wo befindet sich (relativ zu Ihnen) der Punkt mit den kartesischen Koordinaten

$$Y = \begin{pmatrix} 4\,001\,331 \\ 498\,963 \\ 4\,932\,630 \end{pmatrix}?$$

Betrachten Sie die Erde als Kugel mit Radius 6371 km, berechnen Sie die Tangentialebene an die Sphäre an Ihrer Position und projizieren Sie den gesuchten Punkt orthogonal auf die Tangentialebene. Wählen Sie die Basis der Tangentialebene so, dass sie die Abstände in Nord- und Ost-Richtung direkt aus den Koeffizienten der Projektion ablesen können.

LÖSUNG: Wir betrachten die folgende Parametrisierung der Sphäre (mit $R = 6\,371\,000$):

$$x(\varphi,\vartheta) = R\begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\vartheta \\ \sin\varphi\cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{pmatrix}$$

Damit ergeben sich die Tangentialvektoren

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\varphi}x(\varphi,\vartheta) &= R\begin{pmatrix} -\sin\varphi\cos\vartheta \\ \cos\varphi\cos\vartheta \\ 0 \end{pmatrix},\\ \frac{\partial}{\partial\vartheta}x(\varphi,\vartheta) &= R\begin{pmatrix} -\cos\varphi\sin\vartheta \\ -\sin\varphi\sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Mit

$$V = \frac{\frac{\partial x}{\partial \varphi}}{\left\| \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right\|}, W = \frac{\frac{\partial x}{\partial \vartheta}}{\left\| \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \right\|}, N = V \times W$$

erhält man eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$, wobei V und W eine Basis der Tangentialebene und N der Normalenvektor sind.
Mit den gegeben Zahlen erhält man

$$\begin{aligned}
X = x(\varphi, \vartheta) &= \begin{pmatrix} 4001512 \\ 498730 \\ 4932424 \end{pmatrix} \\
V &= \begin{pmatrix} -0.123678 \\ 0.992322 \\ 0 \end{pmatrix} \\
W &= \begin{pmatrix} -0.768255 \\ -0.095751 \\ 0.632941 \end{pmatrix} \\
N &= \begin{pmatrix} 0.628082 \\ 0.078281 \\ 0.774199 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Dann ist $T_X^{aff} S = \{X + \lambda V + \mu W \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ der Tangentialraum.
Der Punkt Y lässt sich eindeutig als $Y = X + \lambda V + \mu W + \nu N$ mit $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ schreiben. $X + \lambda V + \mu W$ ist dann die Projektion auf den Tangentialraum, und ν gibt den Abstand von Y zur Ebene an.
Hier erhalten wir $\lambda = 254.14$, $\mu = 247.11$ und $\nu = 63.99$. Der gesucht Punkt liegt demzufolge von der Hofgartenwiese aus 254 Meter nördlich und 247 Meter östlich auf nahezu der gleichen Höhe.
Es handelt sich also um die Terrasse des Alten Zolls.