Aufgabe 4: Betrachten Sie die folgenden Vektorfelder

$$\text{(i) } f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{(ii) } h(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}, \quad \text{(iii) } g(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

und die Gebiete

$$K = \{(x,y) \mid \sqrt{x^2+y^2} < 1\}$$

und

$$\Omega = \{(x,y) \mid -1 < x < 1 \text{ und } -1 < y < 1\}.$$

Skizzieren Sie die Vektorfelder (i) und (iii) für das Gebiet Ω und (ii) für das Gebiet K.
Wenden Sie den Gaußschen Integralsatz auf die Vektorfelder bzgl. des jeweiligen Gebiets an, berechnen Sie hierfür beide Seite des Integralsatzes und deuten Sie Ihre Ergebnisse.

LÖSUNG: Für ein Vektorfeld $w(x,y)$ und eine Gebiet G lautet der Gaußsche Integralsatz:

$$\int_G \operatorname{div} w(x,y)\, dxdy = \int_{\partial G} w(x,y) \cdot n(x,y)\, dl,$$

wobei n die äußere Normale an den Rand ∂G bezeichnet.

(i) Da es sich um ein konstantes Vektorfeld handelt, gilt:

$$\int_\Omega \operatorname{div} f(x,y)\, dxdy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (0+0)\, dx\, dy = 0.$$

Zur Berechnung über den Rand zerlegen wir nun den Rand $\partial\Omega$ in 4 Teile, d.h. $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_3 \cup \partial\Omega_4$, wobei

$$\begin{aligned}
\partial\Omega_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1+t \end{pmatrix} \mid t \in [0,2] \right\}, \\
\partial\Omega_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} 1-t \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in [0,2] \right\}, \\
\partial\Omega_3 &= \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1-t \end{pmatrix} \mid t \in [0,2] \right\}, \\
\partial\Omega_4 &= \left\{ \begin{pmatrix} -1+t \\ -1 \end{pmatrix} \mid t \in [0,2] \right\}.
\end{aligned}$$

Nun folgt

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} f(x,y)\cdot n(x,y)\, dl &= \int_{\partial\Omega_1} f(x,y)\cdot n(x,y)\, dl + \int_{\partial\Omega_2} f(x,y)\cdot n(x,y)\, dl \\
&\quad + \int_{\partial\Omega_3} f(x,y)\cdot n(x,y)\, dl + \int_{\partial\Omega_4} f(x,y)\cdot n(x,y)\, dl \\
&= \int_0^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 1\, dt + \int_0^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 1\, dt \\
&\quad + \int_0^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 1\, dt + \int_0^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot 1\, dt \\
&= 1 + 1 - 1 - 1 = 0.
\end{aligned}$$

(ii) Beim Gebiet K handelt es sich nun zunächst um den Einheitskreis. Das Vektorfeld $h(x,y)$ rotiert um den Urspung und es gilt

$$\int_K \operatorname{div} h(x,y)\,dxdy = \int_K (0+0)\,dx\,dy = 0.$$

Zur Berechnung über den Rand betrachten wir nun eine Parametisierung des Randes $\partial K = \gamma$, wobei $\gamma(t) = \begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix}$. Hierfür gilt $\gamma'(t) = \begin{pmatrix}-\sin(t)\\ \cos(t)\end{pmatrix}$, $\|\gamma'(t)\| = 1$ und $n(t) = \begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix}$. Damit folgt

$$\begin{aligned}\int_{\partial K} h(x,y)\cdot n(x,y)\,dl =& \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix}-\sin(t)\\ \cos(t)\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix} 1\,dt\\ =&0.\end{aligned}$$

(iii) Das Vektorfeld $g(x,y)$ „fließt“ vom Urspung weg in alle Richtungen gleich und trägt damit alles nach außen. Daher gilt

$$\int_\Omega \operatorname{div} g(x,y)\,dxdy = \int_{-1}^1\int_{-1}^1 (1+1)\,dx\,dy = \int_{-1}^1 4\,dx\,dy = 8,$$

d.h. für das Gebiet hat das Vektorfeld eine positive Flussbilanz (es fließt mehr raus als ein). Zur Berechnung über den Rand benutzen wir nun wieder die Zerlung des Randes aus Teilaufgabe (i) und erhalten

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} g(x,y)\cdot n(x,y)\,dl =& \int_{\partial\Omega_1} g(x,y)\cdot n(x,y)\,dl + \int_{\partial\Omega_2} g(x,y)\cdot n(x,y)\,dl\\ &+ \int_{\partial\Omega_3} g(x,y)\cdot n(x,y)\,dl + \int_{\partial\Omega_4} g(x,y)\cdot n(x,y)\,dl\\ =& \int_0^2 \begin{pmatrix}1\\ -1+t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\cdot 1\,dt + \int_0^2 \begin{pmatrix}1-t\\ 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\cdot 1\,dt\\ &+ \int_0^2 \begin{pmatrix}-1\\ 1-t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\ 0\end{pmatrix}\cdot 1\,dt + \int_0^2 \begin{pmatrix}-1+t\\ -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}\cdot 1\,dt\\ =& \int_0^2 1+1+1+1\,dt = 8.\end{aligned}$$