

Aufgabe 7: Betrachten Sie eine Drehmatrix der Form

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

und Spiegelungsmatrizen der Form

$$B = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \beta & -\cos \beta \end{pmatrix}, \quad \beta \in \mathbb{R}$$

$$C = \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma \\ \sin \gamma & -\cos \gamma \end{pmatrix}, \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

- Berechnen Sie die Matrix AB .
- Berechnen Sie die Matrix BC .
- Da A , B und C in $O(2)$ liegen, sind auch die beiden Matrizen AB und BC orthogonal. Handelt es sich bei AB bzw. BC jeweils um eine Drehung oder Spiegelung?

LÖSUNG:

a)

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \beta & -\cos \beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta & \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta \\ \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta & \sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & \sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & -\cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} BC &= \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \beta & -\cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma \\ \sin \gamma & -\cos \gamma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma & \cos \beta \sin \gamma - \sin \beta \cos \gamma \\ \sin \beta \cos \gamma - \cos \beta \sin \gamma & \sin \beta \sin \gamma + \cos \beta \cos \gamma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \beta \cos(-\gamma) - \sin \beta \sin(-\gamma) & -\cos \beta \sin(-\gamma) - \sin \beta \cos(-\gamma) \\ \sin \beta \cos(-\gamma) + \cos \beta \sin(-\gamma) & -\sin \beta \sin(-\gamma) + \cos \beta \cos(-\gamma) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\beta - \gamma) & -\sin(\beta - \gamma) \\ \sin(\beta - \gamma) & \cos(\beta - \gamma) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Bei der Matrix AB handelt es sich um eine Spiegelung und bei der Matrix BC handelt es sich um eine Drehung.