Aufgabe 8: Betrachten Sie die fünf Punkte

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	2	1	0	1	2

und bestimmen Sie mit der Methode der kleinsten Quadrate dasjenige quadratische Polynom p, das diese Punkte am besten approximiert. Verwenden Sie hierzu die Normalengleichung.

LÖSUNG: Die quadratischen Polynome lassen sich wie folgt darstellen:

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

wobei $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$.
Wir suchen P so, dass

$$\sum_i \left(P(x_i) - y_i\right)^2 = \sum_i \left(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i\right)^2 = \|Aa - y\|^2$$

minimal sei.

$$A^\top A a = A^\top y$$

mit

$$\begin{aligned} a &= (a_0,\, a_1,\, a_2,\, a_3,\, a_4)^T \\ y &= (y_1,\, y_2,\, y_3,\, y_4,\, y_5)^T = (2,1,0,1,2)^T \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \\ 1 & x_4 & x_4^2 \\ 1 & x_5 & x_5^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = A^\top A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{pmatrix}$$

$$g = A^\top y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Jetzt lösen wir die Gleichung $Ba = g$ (B und g sind oben definiert) (zum Beispiel) mit QR-Zerlegung.

Sei dazu

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} \\
\|u_1\| &= 5\sqrt{5} \\
\alpha_1 = -\text{sign }(u_{11})\|u_1\| &= -5\sqrt{5}
\end{aligned}
$$

und weiter

$$
n_1 = u_1 - \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+5\sqrt{5} \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
Q^{(1)} &= \mathbb{1} - 2\frac{n_1\, n_1^T}{\|n_1\|^2} = \mathbb{1} - \frac{1}{125+25\sqrt{5}} n_1\, n_1^T \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
R_1 = {Q^{(1)}}^T B = Q^{(1)} B = \begin{pmatrix} -5\sqrt{5} & 0 & -\frac{78}{\sqrt{5}} \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{14}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}
$$

Wir brauchen keinen weiteren Schritt, weil R_1 schon Dreiecks-Gestalt hat und können unser System jetzt durch Rückwärts-Einsetzen lösen.
Die neue System-Gleichung ist

$$
R_1 a = g_1 \qquad\qquad \text{mit } g_1 = {Q^{(1)}}^T g = Q^{(1)} g = \begin{pmatrix} -\frac{42}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{6}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}
$$

Wir haben dann

$$
\begin{aligned}
a_2 &= \frac{6}{\sqrt{5}} \frac{\sqrt{5}}{14} = \frac{3}{7} \\
a_1 &= 0 \\
-5\sqrt{5}\, a_0 - \frac{78}{\sqrt{5}} a_2 &= -\frac{42}{\sqrt{5}} \\
\Rightarrow a_0 &= -\frac{1}{5\sqrt{5}} \left(\frac{78}{\sqrt{5}} a_2 - \frac{42}{\sqrt{5}} \right) = \frac{12}{35}
\end{aligned}
$$

und das Polynom ist

$$
p = \frac{12}{35} + \frac{3}{7} x^2
$$