Aufgabe 5: Betrachten Sie das folgende vereinfachte Modell der Dichteverteilung in der Erde: Sei $K \subset \mathbb{R}^3$ eine Kugel mit Radius $6 \cdot 10^6$ (in Metern) um den Ursprung. K habe die Dichte (in kg/m^3)

$$\rho(x) = \begin{cases} 12 \cdot 10^3 - \frac{\|x\|}{1 \cdot 10^3} & \text{für} \quad \|x\| \leq 3 \cdot 10^6, \\ 6 \cdot 10^3 - \frac{\|x\|}{3 \cdot 10^3} & \text{für} \quad \|x\| > 3 \cdot 10^6. \end{cases}$$

Berechnen Sie die Masse von K.

Lösung: Unter Verwendung von Kugelkoordinaten ergibt sich:

$$\begin{aligned}
M_K &= \int_K \rho(r(x))\, dx \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{6\cdot 10^6} \rho(r)\, r^2 \sin\vartheta \; dr\, d\vartheta\, d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta \left(\int_0^{3\cdot 10^6} 12 \cdot 10^3 r^2 - 10^{-3} r^3 \, dr + \int_{3\cdot 10^6}^{6\cdot 10^6} 6 \cdot 10^3 r^2 - \tfrac{1}{3} 10^{-3} r^3 \, dr \right) \\
&= 2\pi(-\cos\pi + \cos 0) \left(4 \cdot 10^3 r^3 - \tfrac{1}{4} 10^{-3} r^4 \Big|_0^{3\cdot 10^6} + 2 \cdot 10^3 r^3 - \tfrac{1}{12} 10^{-3} r^4 \Big|_{3\cdot 10^6}^{6\cdot 10^6} \right) \\
&= 4\pi \left(108 \cdot 10^{21} - \tfrac{81}{4} \cdot 10^{21} + 432 \cdot 10^{21} - 108 \cdot 10^{21} - 54 \cdot 10^{21} + \tfrac{27}{4} \cdot 10^{21} \right) \\
&= 4\pi \tfrac{364}{2} \cdot 10^{21} = 1458\pi \cdot 10^{21} \approx 4{,}58 \cdot 10^{24}
\end{aligned}$$

Die Masse der Erde beträgt tatsächlich ungefähr $5{,}9736 \cdot 10^{24}$ kg. Das Modell ist offensichtlich stark vereinfacht.

Aufgabe 6: Wir betrachten ein Rohr

$$R = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z \in [0, 10] \text{ und } \sqrt{x^2 + y^2} \in \left[1, \frac{6}{5}\right] \right\},$$

bei dem das Wandmaterial die Dichte

$$\rho(x, y, z) = \frac{z + 4}{x^2 + y^2}$$

hat. Berechnen Sie die Masse des Rohres

$$\int_R \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Lösung: Unter Verwendung von Zylinderkoordinaten und $r^2 = x^2 + y^2$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
M_R &= \int_R \rho(r(x,y,z))\,dx\,dy\,dz \\
&= \int_R \frac{z+4}{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz \\
&= \int_0^{10}\int_0^{2\pi}\int_1^{\frac{6}{5}} \frac{z+4}{r^2}\,r\;dr\,d\varphi\,dz \\
&= \int_0^{10} z+4\,dz\;\int_0^{2\pi} d\varphi\;\int_1^{\frac{6}{5}} r^{-1}\,dr \\
&= \left[\tfrac{1}{2}z^2+4z\right]_0^{10}\;2\pi\;[\ln r]_1^{\frac{6}{5}} \\
&= (50+40)\,2\pi\;\ln\tfrac{6}{5} = 180\pi\ln\tfrac{6}{5}
\end{aligned}$$

Aufgabe 7: Betrachten Sie die folgende Kurve:

$$\gamma(t) = e^{\alpha t}\begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix}, \quad \alpha = -\frac{1}{10},\; t \in [0,T]$$

a) Skizzieren Sie die Kurve.
Tipp: Berechnen Sie $\gamma(0)$, $\gamma(2\pi)$, $\gamma(4\pi)$, $\gamma(6\pi)$ mit Hilfe eines Taschenrechners.

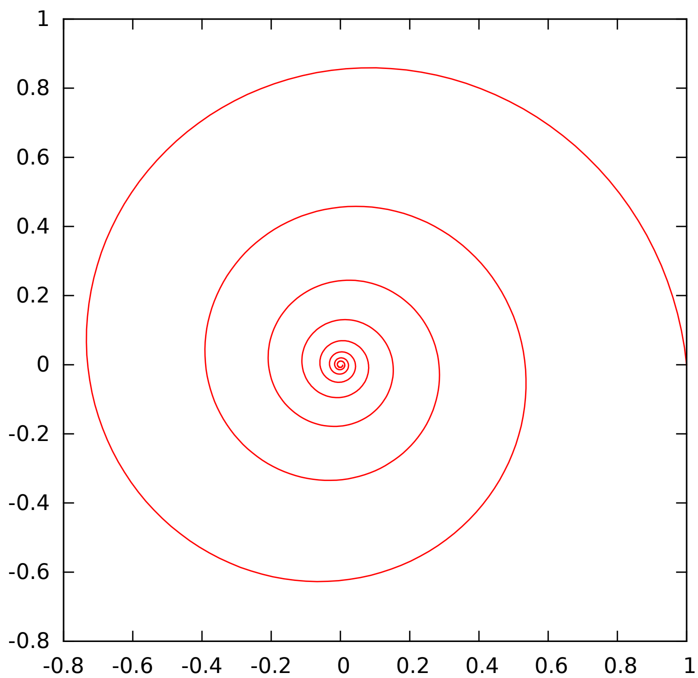
b) Berechnen Sie den Betrag der Geschwindigkeit.

c) Bestimmen Sie die Länge der Kurve $l(T)$.

d) Was ist der Grenzwert von $l(T)$ für $T \to \infty$.

Lösung:

a) Es handelt sich um die sogenannte *logarithmische Spirale*:



b) Der Geschwindigkeitsvektor ist gegeben durch

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \alpha e^{\alpha t}\cos(t) + e^{\alpha t} - \sin(t) \\ \alpha e^{\alpha t}\sin(t) + e^{\alpha t}\cos(t) \end{pmatrix}$$

und somit läßt sich der Betrag der Geschwindigkeit wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} \|\dot{\gamma}(t)\| &= e^{\alpha t}\sqrt{(\alpha\cos(t) - \sin(t))^2 + (\alpha\sin(t) + \cos(t))^2} \\ &= e^{\alpha t}\sqrt{\alpha^2\cos^2(t) + \alpha^2\sin^2(t) + \sin^2(t) + \cos^2(t)} \\ &= e^{\alpha t}\sqrt{\alpha^2 + 1} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} l(T) &= \int_0^T \|\dot{\gamma}(s)\|\, ds = \sqrt{\alpha^2+1}| \int_0^T e^{\alpha s}\, ds \\ &= \sqrt{\alpha^2+1}\left[\frac{1}{\alpha}e^{\alpha s}\right]_0^T \\ &= \frac{\sqrt{\alpha^2+1}}{\alpha}\left(e^{\alpha T} - 1\right) \\ &= -\sqrt{101}\left(e^{-\frac{T}{10}} - 1\right) \end{aligned}$$

d)

$$\lim_{T\to\infty} l(T) = \sqrt{101}$$

Aufgabe 8: Sei d eine positive reelle Zahl (eine zu messende Länge in Metern).

a) Wir betrachten die beiden Punkte

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{d}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{d}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass der Abstand der beiden Punkte gleich d ist.

b) Wir betrachten die Kurve $\bar{\Gamma}$, definiert durch

$$\bar{\gamma} : \left[-\frac{d}{2}, \frac{d}{2}\right] \to \mathbb{R}^2,\ \bar{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\bar{\Gamma}$ die Punkte A und B verbindet.

Berechnen Sie die Länge von $\bar{\Gamma}$.

Um welche Kurve handelt es sich?

c) Sei

$$R = \frac{6{,}37 \cdot 10^6}{0{,}13}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{R^2 - \frac{d^2}{4}} \end{pmatrix}, \quad T = \arcsin\left(\frac{d}{2R}\right).$$

Wir betrachten die Kurve $\tilde{\Gamma}$, definiert durch

$$\tilde{\gamma} : [-T, T] \to \mathbb{R}^2,\ \tilde{\gamma}(t) = M + R\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\tilde{\Gamma}$ die Punkte A und B verbindet.

Berechnen Sie die Länge von $\tilde{\Gamma}$.

Um welche Kurve handelt es sich?

d) Fertigen Sie eine Skizze der Situation an.

e) Welche Kurve ist länger?

Wie groß ist die Längendifferenz für $d = 100; 1000; 10000$ [m]?

Wie groß ist der Abstand $\|\tilde{\gamma}(0) - \bar{\gamma}(0)\|$ für diese Werte von d?

f) $L(d) = 2R \arcsin\left(\frac{d}{2R}\right)$ ist die Länge von $\tilde{\Gamma}$.

Berechnen Sie die Taylor-Entwicklung von $\arcsin(x)$ um $x = 0$ mit Fehlerterm vierter Ordnung.

Verwenden Sie diese, um eine Näherungsformel für die Längendifferenz zu finden.

Vergleichen Sie deren Ergebnisse mit den exakten Ergebnissen für $d = 100; 1000; 10000$ [m].

LÖSUNG:

a) $\|B - A\| = d$

b)

$$\bar{\gamma}\left(-\frac{d}{2}\right) = A, \quad \bar{\gamma}\left(\frac{d}{2}\right) = B, \quad \bar{\gamma} \text{ stetig}$$

$$\|\dot{\bar{\gamma}}(t)\| = 1$$

$$\int_{\bar{\Gamma}} 1\, dl = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} 1 \cdot 1\, dt = \frac{d}{2} - \left(-\frac{d}{2}\right) = d$$

Es handelt sich um die Gerade durch A und B.

c)

$$\begin{aligned}
\tilde{\gamma}(-T) &= M + R \begin{pmatrix} -\sin T \\ \sqrt{1-\sin^2 T} \end{pmatrix} \\
&= M + R \begin{pmatrix} -\frac{d}{2R} \\ \frac{\sqrt{R^2-\frac{d^2}{4}}}{R} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 - R\frac{d}{2R} \\ -\sqrt{R^2-\frac{d^2}{4}} + R\frac{\sqrt{R^2-\frac{d^2}{4}}}{R} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{d}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = A,
\end{aligned}$$

analog ergibt sich $\tilde{\gamma}(T) = B$ (einziger Unterschied: $+\sin T$ im ersten Schritt).

$$\|\dot{\tilde{\gamma}}(t)\| = \sqrt{0 + R^2(\sin^2 t + \cos^2 t)} = R$$

$$\int_{\tilde{\Gamma}} 1\, dl = \int_{-T}^{T} 1 \cdot R\, dt = 2R \arcsin\left(\frac{d}{2R}\right)$$

Es handelt sich um einen Kreisbogen mit Radius R von A nach B (Lichtweg bei genügend großer Entfernung von der Erdoberfläche).

d) ...

e) $\tilde{\Gamma}$ ist länger.

Die Längendifferenz ist

$$2R \arcsin\left(\frac{d}{2R}\right) - d.$$

Für $d = 100$ [m] ergibt sich die Differenz $1{,}73 \cdot 10^{-11}$ [m] (17 Pikometer).

Für $d = 1000$ [m] ergibt sich die Differenz $1{,}73 \cdot 10^{-8}$ [m] (17 Nanometer).

Für $d = 10000$ [m] ergibt sich die Differenz $1{,}73 \cdot 10^{-5}$ [m] (17 Mikrometer).

Der Abstand $\|\tilde{\gamma}(0) - \bar{\gamma}(0)\| = \tilde{\gamma}_2(0) = -\sqrt{R^2 - \frac{d^2}{4}} + R$ ist offensichtlich der maximale Abstand der beiden Kurven.

Für $d = 100$ [m] ergibt sich der Abstand $2{,}55 \cdot 10^{-5}$ [m] (25 Mikrometer).

Für $d = 1000$ [m] ergibt sich der Abstand $2{,}55 \cdot 10^{-3}$ [m] (2,5 Millimeter).

Für $d = 10000$ [m] ergibt sich der Abstand $2{,}55 \cdot 10^{-1}$ [m] (25 Zentimeter).

f)

$$
\begin{aligned}
\arcsin'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
\arcsin''(x) &= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}^3} \\
\arcsin'''(x) &= \frac{2x^2+1}{\sqrt{1-x^2}^5} \\
\arcsin(0) &= 0 \\
\arcsin'(0) &= 1 \\
\arcsin''(0) &= 0 \\
\arcsin'''(0) &= 1 \\
\arcsin(x) &= 0 + x + 0 + \frac{1}{6}x^3 + O(x^4) = x + \frac{1}{6}x^3 + O(x^4) \\
L(d) &= 2R \arcsin\left(\frac{d}{2R}\right) \\
&= 2R\left(\frac{d}{2R} + \frac{1}{6}\frac{d^3}{8R^3} + O\left(\left(\frac{d}{R}\right)^4\right)\right) \\
&= d + \frac{1}{24}\frac{d^3}{R^2} + O\left(\left(\frac{d}{R}\right)^4\right) \\
\Rightarrow L(d) - d &= \frac{1}{24R^2} \cdot d^3 + O\left(\left(\frac{d}{R}\right)^4\right)
\end{aligned}
$$

Es ergeben sich auf 5 signifikante Stellen die selben Werte wie oben.

Insbesondere sieht man hier direkt, dass sich bei zehnfacher Länge die tausendfache Differenz ergibt (d^3), mit $\frac{1}{24R^2} \approx 17 \cdot 10^{-18}$ erhält man leicht im Kopf die oben in Klammern angebenen Abschätzungen.