Aufgabe 9: Berechnen Sie die Länge zweier Kurven auf der Erdoberfläche (im Kugelmodell), die St. Petersburg ($60°N$, $30°O$) mit Anchorage in Alaska ($60°N$, $150°W$) verbinden.

- Geben Sie die Koordinaten φ und ϑ (bzgl. der Parametrisierung aus der Vorlesung) der beiden Punkte im Bogenmaß an.
- Geben Sie eine Parametrisierung der Kurve (im Parameterbereich) an, die die beiden Punkte entlang des gemeinsamen Breitenkreises verbindet.
- Geben Sie eine Parametrisierung der Kurve (im Parameterbereich) an, die die beiden Punkte entlang zweier Meridiane über den Nordpol verbindet. Hinweis: Im Parameterbereich besteht die Kurve aus zwei Teilen.
- Berechnen Sie die Länge der beiden Kurven.

LÖSUNG:

- $\vartheta = \frac{\pi}{3}$ sowie $\varphi = \frac{\pi}{6}$ (St. Petersburg) bzw. $\varphi = -\frac{5}{6}\pi$ (Anchorage)
- $b(t) = \begin{pmatrix} t \\ \frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$, wobei $t \in [-\frac{5}{6}\pi, \frac{\pi}{6}]$
- $m_1(t) = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{6} \\ t \end{pmatrix}$, wobei $t \in [\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}]$ und
  $m_2(t) = \begin{pmatrix} -\frac{5}{6}\pi \\ t \end{pmatrix}$, wobei $t \in [\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}]$.
  (Ohne Berücksichtigung der Durchlaufrichtung, da nur nach der Länge gesucht wird)
- $$\text{Länge}(b) = \int_{-\frac{5}{6}\pi}^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{\begin{pmatrix} R^2\cos^2\vartheta & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}\,dt = \int_{-\frac{5}{6}\pi}^{\frac{\pi}{6}} R\cos\frac{\pi}{3}\,dt = \frac{1}{2}\pi R$$
  $$\text{Länge}(m_1) = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\begin{pmatrix} R^2\cos^2\vartheta & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}\,dt = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} R\,dt = \frac{1}{6}\pi R$$
  Für das zweite Teilstück m_2 ergibt sich analog die selbe Länge.
  Damit hat die Kurve entlang des Breitenkreises die Länge $\frac{1}{2}\pi R \approx 10\,000$ [km], die Kurve über den Nordpol insgesamt $\frac{1}{3}\pi R \approx 6\,700$ [km], also ein Drittel kürzer.

Aufgabe 10: Betrachten Sie einen durch

$$x(\phi, h) = \begin{pmatrix} h\cos\phi \\ h\sin\phi \\ h \end{pmatrix}$$

mit $\phi \in [0, 2\pi)$ und $h \in (0, 1]$ parametrisierten Kegel.
In welchem Winkel schneiden sich die "Breitenkreise"

$$b : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3 : \quad b(t) = x(t, h_0) \qquad \text{für festes } h_0 \in (0, 1]$$

mit den "Meridianen"

$$m : (0, 1] \to \mathbb{R}^3 : \quad m(t) = x(\phi_0, t) \qquad \text{für festes } \phi_0 \in [0, 2\pi)?$$

Tipp: Verwenden Sie die Metrik.

LÖSUNG: Zuerst berechnen wir die Metrik $G = (Dx)^T Dx$

$$\begin{aligned} G &= (Dx)^T Dx \\ &= \begin{pmatrix} -h\sin\phi & h\cos\phi & 0 \\ \cos\phi & \sin\phi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -h\sin\phi & \cos\phi \\ h\cos\phi & \sin\phi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} h^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Da die beiden Kurven sich im Punkt $x(\phi_0, h_0)$ schneiden und $\tilde{b}(t) = \begin{pmatrix} t \\ h_0 \end{pmatrix}$ und $\tilde{m}(t) = \begin{pmatrix} \phi_0 \\ t \end{pmatrix}$ die zugehörigen Kurven im Parameterbereich sind, berechnen wir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\tilde{b}(t)\bigg|_{t=\phi_0} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{d}{dt}\tilde{m}(t)\bigg|_{t=h_0} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{G\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{G\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \sqrt{G\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}} \\ &= \frac{\begin{pmatrix} h^2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{G\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \sqrt{G\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}} \\ &= 0, \end{aligned}$$

d.h. die beiden Kuven auf der Hyperfläche schneiden sich im Winkel $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Aufgabe 11: Gegeben sei die Parametrisierung

$$x(\phi, h) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi\phi) \\ \sin(2\pi\phi) \\ h \end{pmatrix}$$

mit $\phi \in [0,1)$ und $h \in [0,1]$.

a) Welche Hyperfläche beschreibt diese Parametrisierung?

b) Betrachten Sie die Kurven

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}, \qquad t \in [0,1] \\ \gamma_2(t) &= \begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad t \in [0,1) \end{aligned}$$

im Parameterbereich. Beschreiben Sie die Kurven $x \circ \gamma_i$ mit $i = 1, 2$, die auf der parametrisierten Fläche liegen.

c) Berechnen Sie mit Hilfe dieser beiden Kurven zwei Tangentialvektoren an die Fläche im Punkt $x(0, \frac{1}{2})$.

d) Berechnen Sie in diesem Punkt einen Normalenvektor an die Fläche.

e) Berechnen Sie den metrischen Tensor auf dieser Fläche.

f) Verwenden Sie den metrischen Tensor, um die Länge der beiden Kurven $x \circ \gamma_i$ mit $i = 1, 2$ auf der Fläche zu berechnen.

g) In welchem Winkel schneiden sich die beiden Kurven?

LÖSUNG:

a) Die Parametrisierung beschreibt einen Zylindermantel. Der Zylinder hat eine Grundfläche von Radius 1, die Höhe 1 und die Symmetrieachse des Zylinders liegt auf der z-Achse des Koordinatensystems.

b)

$$\begin{aligned} x \circ \gamma_1(t) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}, \qquad t \in [0,1] \\ x \circ \gamma_2(t) &= \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad t \in [0,1) \end{aligned}$$

Bei der Kurve $x \circ \gamma_1$ handelt es sich um eine Strecke vom Punkt $(1,0,0)$ zum Punkt $(1,0,1)$. Sie verläuft parallel zur Symmetrieachse des Zylinders und steht senkrecht auf der $x-y-$Ebene und somit senkrecht auf der Grundfläche des Zylinders.
Die Kurve $x \circ \gamma_2$ ist eine geschlossene Kreiskurve auf dem Zylindermantel. Sie liegt auf Höhe $\frac{1}{2}$ und verläuft parallel zur Grundfläche des Zylinders.

c) Mit Hilfe der beiden Kurven aus dem vorherigen Aufgabenteil sollen zwei Tangentialvektoren an die Fläche im Punkt

$$x\left(0, \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

berechnet werden. Da $\gamma_1\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ und $\gamma_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ gilt, berechnen wir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(x \circ \gamma_1(t))\bigg|_{t=\frac{1}{2}} &= \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}\bigg|_{t=\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \frac{d}{dt}(x \circ \gamma_2(t))\bigg|_{t=0} &= \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}\bigg|_{t=0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\pi \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Zwei Tangentialvektoren an die Fläche im Punkt $x(0, \frac{1}{2})$ lauten also $v_1 = (0, 0, 1)^T$ und $v_2 = (0, 2\pi, 0)^T$. Da diese beiden Vektoren linear unabhängig sind, spannen sie den ganzen Tangentialraum an die Fläche im Punkt $x(0, \frac{1}{2})$ auf.

d) Da die beiden Vektoren v_1 und v_2 den Tangentialraum an die Fläche im Punkt $x(0, \frac{1}{2})$ aufspannen, berechnet sich der Normalenvektor an die Fläche im Punkt $x(0, \frac{1}{2})$ wie folgt:

$$n = \frac{v_1 \times v_2}{\|v_1 \times v_2\|}.$$

$$\begin{aligned} v_1 \times v_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2\pi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\pi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \quad n &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e) Der metrische Tensor G auf der Mantelfläche des Zylinders berechnet sich wie folgt

$$G = (Dx)^T Dx$$

und

$$Dx = \begin{pmatrix} -2\pi\sin(2\pi\phi) & 0 \\ 2\pi\cos(2\pi\phi) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} G &= (Dx)^T Dx \\ &= \begin{pmatrix} -2\pi\sin(2\pi\phi) & 2\pi\cos(2\pi\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2\pi\sin(2\pi\phi) & 0 \\ 2\pi\cos(2\pi\phi) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4\pi^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

f) Aus dem Skript wissen wir, dass sich die Länger l_1 der Kurve $x \circ \gamma_1$ auf dem Zylindermantel wie folgt mit Hilfe des metrischen Tensors berechnen läßt.

$$\begin{aligned}
l_1 &= \int_0^1 \sqrt{G\,\dot\gamma_1(t)\cdot\dot\gamma_1(t)}\,dt \\
&= \int_0^1 \sqrt{\begin{pmatrix} 4\pi^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}\,dt \\
&= \int_0^1 \sqrt{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}\,dt \\
&= \int_0^1 dt \\
&= 1
\end{aligned}$$

Für die Länge l_2 der Kurve $x \circ \gamma_2$ auf dem Zylindermantel ergibt sich

$$\begin{aligned}
l_2 &= \int_0^1 \sqrt{G\,\dot\gamma_2(t)\cdot\dot\gamma_2(t)}\,dt \\
&= \int_0^1 \sqrt{\begin{pmatrix} 4\pi^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}\,dt \\
&= \int_0^1 \sqrt{\begin{pmatrix} 4\pi^2 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}\,dt \\
&= \int_0^1 2\pi\,dt \\
&= 2\pi
\end{aligned}$$

g) Die beiden Kurven schneiden sich im Punkt $x\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Um den Winkel α zu berechnen, in dem sie sich schneiden, benötigen wir die beiden Tangentialvektoren v_1 und v_2. Nun gilt

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{v_1 \cdot v_2}{\|v_1\|\,\|v_2\|} \\
&= \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 2\pi \\ 0 \end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\|\left\|\begin{pmatrix} 0 \\ 2\pi \\ 0 \end{pmatrix}\right\|} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Daraus folgt die beiden Kurven schneiden sich im Winkel $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Aufgabe 12: Betrachten Sie die Fläche $\mathcal{S}$, welche durch die Abbildung $x : \Omega \to \mathbb{R}^3$ mit

$$x(v,w) = \begin{pmatrix} (R + r\cos w)\,\cos v \\ (R + r\cos w)\,\sin v \\ r\,\sin w \end{pmatrix}$$

und $\Omega := [0, 2\pi]^2$ parametrisiert (mit Radii $R > r > 0$).

a) Skizzieren Sie die Fläche $\mathcal{S}$ (Tipp: Betrachten Sie die Kurven $h(t) = x(a,t)$ und $v(t) = x(t,a)$ für $a = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$).

b) Berechnen Sie den metrischen Tensor $G(v,w) \in \mathbb{R}^{2,2}$.

c) Berechnen Sie die Normale $N(v,w) \in \mathbb{R}^3$.

Betrachten Sie nun die Kurve $c : [0,1] \to \Omega$ im Parametergebiet, definiert durch

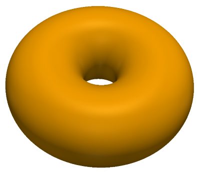
$$c : \xi \mapsto (\tfrac{\pi}{2},\ 2\pi\,\xi)$$

und die Raumkurve $\gamma = x \circ c : [0,1] \to \mathbb{R}^3$.

d) Berechnen Sie die Länge der Kurve γ.

LÖSUNG:

a) Kurve $h(t)$ beschreibt jeweils einen Kreis mit Radius r:



- $a = 0$: Kreis liegt in der x-z-Ebene mit Mittelpunkt $(R, 0, 0)$.
- $a = \frac{\pi}{2}$: Kreis liegt in der y-z-Ebene mit Mittelpunkt $(0, R, 0)$.
- $a = \pi$: Kreis liegt in der x-z-Ebene mit Mittelpunkt $(-R, 0, 0)$.
- $a = \frac{3\pi}{2}$: Kreis liegt in der y-z-Ebene mit Mittelpunkt $(0, -R, 0)$.

Kurve $v(t)$ beschreibt jeweils einen Kreis in der x-y-Ebene:

- $a = 0$: Kreis hat Radius $R + r$ und Mittelpunkt $(0, 0, 0)$.
- $a = \frac{\pi}{2}$: Kreis hat Radius R und Mittelpunkt $(0, 0, r)$.
- $a = \pi$: Kreis hat Radius $R - r$ und Mittelpunkt $(0, 0, 0)$.
- $a = \frac{3\pi}{2}$: Kreis hat Radius R und Mittelpunkt $(0, 0, -r)$.

b) Es gilt $G = Dx^T Dx$, wobei

$$Dx(v,w) = \Big(\partial_v x \;\Big|\; \partial_w x\Big) = \begin{pmatrix} -(R + r\cos w)\,\sin v & -r\cos v\,\sin w \\ (R + r\cos w)\,\cos v & -r\sin v\,\sin w \\ 0 & r\,\cos w \end{pmatrix}$$

also

$$Dx(v,w)^T Dx(v,w) = \begin{pmatrix} (R + r\cos w)^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

c) Die Normale ist gegeben durch

$$N(v,w) = \frac{\partial_v x \times \partial_w x}{\|\partial_v x \times \partial_w x\|}\,, \quad \partial_v x \times \partial_w x = \begin{pmatrix} r(R + r\cos w)\cos v\ \cos w \\ r(R + r\cos w)\sin v\ \cos w \\ r(R + r\cos w)\sin w \end{pmatrix}$$

und $\|\partial_v x \times \partial_w x\| = r(R + r\cos w)$, daher

$$N(v,w) = \begin{pmatrix} \cos v\ \cos w \\ \sin v\ \cos w \\ \sin w \end{pmatrix}\,.$$

d) Die Länge einer Kurve γ ist definiert als $L[\gamma] = \int_0^1 \|\dot\gamma(\xi)\|\,\mathrm{d}\xi$. Es gilt

$$\gamma = x \circ c : \xi \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ R + r\cos(2\pi\,\xi) \\ r\ \sin(2\pi\,\xi) \end{pmatrix}\,, \quad \dot\gamma(\xi) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\pi\,r\sin(2\pi\,\xi) \\ 2\pi\,r\ \cos(2\pi\,\xi) \end{pmatrix}\,,$$

oder alternativ mit Kettenregel

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi}\Big(x \circ c\Big)(\xi) = Dx(c(\xi)) \cdot \dot c(\xi) &= \begin{pmatrix} -(R + r\cos(2\pi\xi))\ \sin\frac{\pi}{2} & -r\cos\frac{\pi}{2}\ \sin(2\pi\xi) \\ (R + r\cos(2\pi\xi))\ \cos\frac{\pi}{2} & -r\sin\frac{\pi}{2}\ \sin(2\pi\xi) \\ 0 & r\ \cos(2\pi\xi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2\pi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ -2\pi\,r\sin(2\pi\,\xi) \\ 2\pi\,r\ \cos(2\pi\,\xi) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und somit

$$\|\dot\gamma(\xi)\|^2 = (2\pi r)^2\,(\sin^2(2\pi\,\xi) + \cos^2(2\pi\,\xi)) = (2\pi r)^2\,.$$

Es folgt $L[\gamma] = 2\pi r$.