Aufgabe 13: Betrachten Sie die Funktion $g(x) = \cosh x$. Berechnen Sie die Länge des Graphen von g zwischen den Punkten $(-1, \cosh(-1))$ und $(1, \cosh(1))$.
Tipp: $\cosh' x = \sinh x$, $\sinh' x = \cosh x$, $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

Aufgabe 14: Für $r : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist die Rotationsfläche definiert als

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} r(z)\cos\varphi \\ r(z)\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \,\middle|\, z \in [a,b],\ \varphi \in [0, 2\pi) \right\}.$$

Die Oberfläche von S ist gegeben durch $2\pi \int_a^b r(z)\sqrt{1 + (r'(z))^2}\,dz$. Benutzen Sie diese Formel, um die Oberfläche eines Kegels der Höhe $h > 0$ und Radius $R > 0$ zu berechnen.

Aufgabe 15: Betrachten Sie einen durch

$$x(\phi, h) = \begin{pmatrix} h\cos\phi \\ h\sin\phi \\ h \end{pmatrix}$$

mit $\phi \in [0, 2\pi)$ und $h \in (0, H]$ parametrisierten Kegel.
Berechnen Sie die Oberfläche des Kegels (abhängig von H).

Aufgabe 16:

a) Seien $g : [0, \sqrt{2}] \times [0, \sqrt{2}\pi] \to \mathbb{R}^2$, $g(r, \theta) = \begin{pmatrix} r\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix}$ Polarkordinaten im $\mathbb{R}^2$. Skizzieren Sie die Fläche $g(U) \subset \mathbb{R}^2$, wobei $U = [0, \sqrt{2}] \times [0, \sqrt{2}\pi]$ und berechnen Sie ihren Flächeninhalt.

b) Sei $x : [0, 1] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $x(h, \varphi) = \begin{pmatrix} h\cos(\varphi) \\ h\sin(\varphi) \\ h \end{pmatrix}$ die Parametrisierung einer Fläche $K \subset \mathbb{R}^3$. Skizziere Sie die Fläche K und berechnen Sie deren Oberfläche.

c) Welche geometrische Bedeutung hat es, dass die Flächen den gleichen Oberflächeninhalt haben?