Aufgabe 13: Betrachten Sie die Funktion $g(x) = \cosh x$. Berechnen Sie die Länge des Graphen von g zwischen den Punkten $(-1, \cosh(-1))$ und $(1, \cosh(1))$.
Tipp: $\cosh' x = \sinh x$, $\sinh' x = \cosh x$, $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

LÖSUNG: Der Graph der Funktion g ist gegeben durch

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ g(t) \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt

$$\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \dot g(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sinh t \end{pmatrix}$$

Also können wir die Länge l des Graphen von g zwischen den beiden Punkten $(-1, \cosh(-1))$ und $(1, \cosh(1))$ wie folgt berechnen

$$\begin{aligned} l &= \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \dot g^2(t)}\, dt \\ &= \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \sinh^2 t}\, dt \\ &= \int_{-1}^{1} \cosh t\, dt \\ &= \sinh t \Big|_{-1}^{1} \\ &= \frac{1}{2}\left(e^t - e^{-t}\right)\Big|_{-1}^{1} \\ &= e - \frac{1}{e} \end{aligned}$$

Bemerkung: Der Graph von cosh wird auch als *Katenoide* bezeichnet. Er beschreibt den Verlauf eines Seils, das an zwei Punkten aufgehangen wird.

Aufgabe 14: Für $r : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist die Rotationsfläche definiert als

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} r(z)\cos\varphi \\ r(z)\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; z \in [a, b],\ \varphi \in [0, 2\pi) \right\}.$$

Die Oberfläche von S ist gegeben durch $2\pi \int_a^b r(z)\sqrt{1 + (r'(z))^2}\, dz$. Benutzen Sie diese Formel, um die Oberfläche eines Kegels der Höhe $h > 0$ und Radius $R > 0$ zu berechnen.

LÖSUNG: Wir haben $r(z) = \frac{R}{h} z$ und $r'(z) = \frac{R}{h}$, also ist die Oberfläche gegeben durch

$$2\pi \int_a^b r(z)\sqrt{1 + (r'(z))^2}\, dz = 2\pi \cdot \frac{R}{h} \cdot \sqrt{1 + \frac{R^2}{h^2}} \cdot \int_0^h z\, dz = \pi\, R\, h \cdot \sqrt{1 + \frac{R^2}{h^2}}.$$

Aufgabe 15: Betrachten Sie einen durch

$$x(\phi, h) = \begin{pmatrix} h\cos\phi \\ h\sin\phi \\ h \end{pmatrix}$$

mit $\phi \in [0, 2\pi)$ und $h \in (0, H]$ parametrisierten Kegel.
Berechnen Sie die Oberfläche des Kegels (abhängig von H).

LÖSUNG: Zuerst berechnen wir die Metrik $G = (Dx)^T Dx$

$$
\begin{aligned}
G &= (Dx)^T Dx \\
&= \begin{pmatrix} -h\sin\phi & h\cos\phi & 0 \\ \cos\phi & \sin\phi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -h\sin\phi & \cos\phi \\ h\cos\phi & \sin\phi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} h^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \\
\sqrt{\det G} &= \sqrt{2}h
\end{aligned}
$$

Nun gilt für die Fläche

$$
\begin{aligned}
\text{Flächeninhalt(Kegel)} &= \int_0^{2\pi}\int_0^H \sqrt{2}h\,dh\,d\phi \\
&= 2\pi\sqrt{2}\frac{1}{2}H^2 = \sqrt{2}\pi H^2.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 16: a) Seien $g : [0, \sqrt{2}] \times [0, \sqrt{2}\pi] \to \mathbb{R}^2$, $g(r,\theta) = \begin{pmatrix} r\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix}$ Polarkordinaten im $\mathbb{R}^2$. Skizzieren Sie die Fläche $g(U) \subset \mathbb{R}^2$, wobei $U = [0, \sqrt{2}] \times [0, \sqrt{2}\pi]$ und berechnen Sie ihren Flächeninhalt.

b) Sei $x : [0, 1] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $x(h,\varphi) = \begin{pmatrix} h\cos(\varphi) \\ h\sin(\varphi) \\ h \end{pmatrix}$ die Parametrisierung einer Fläche $K \subset \mathbb{R}^3$. Skizziere Sie die Fläche K und berechnen Sie deren Oberfläche.

c) Welche geometrische Bedeutung hat es, dass die Flächen den gleichen Oberflächeninhalt haben?

LÖSUNG:

a) Es gilt

$$
Dg = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix}
$$

und $\det(Dg) = r$. Der Flächeninhalt des Kreissektors $g(U)$ („Tortenstück“) berechnet sich nun wiefolgt:

$$
\begin{aligned}
\text{Flächeninhalt}(g(U)) &= \int_{g(U)} dx = \int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2}\pi} \det(Dg) d\theta dr \\
&= \int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2}\pi} r d\theta dr = \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2}\pi r dr = \sqrt{2}\pi[\frac{1}{2}r^2]_0^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\pi
\end{aligned}
$$

b) Es gilt

$$
Dx = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -h\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & h\cos(\varphi) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

und damit

$$Dx^T Dx = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & h^2 \end{pmatrix}.$$

Der Oberflächeninhalt des Kegels K berechnet sich nun wiefolgt:

$$\begin{aligned} \text{Oberflächeninhalt}(K) &= \int_K da = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{\det(Dx^T Dx)} d\varphi dh \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{2} h d\varphi dh = \int_0^1 2\sqrt{2}\pi h dh = 2\sqrt{2}\pi [\frac{1}{2}h^2]_0^1 = \sqrt{2}\pi \end{aligned}$$

c) Kleben wir die den Kreissektor $g(U)$ aus Teilaufgabe a) an den Enden (d.h. $g(.,0)$ und $g(.,\sqrt{2}\pi)$) zusammen, so erhalten wir genau den Kegel K aus Teilaufgabe b).