Aufgabe 17: Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\partial K} \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \end{pmatrix} \cdot N \, dl$$

über den Rand des Kreises $K = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ einmal direkt mit Hilfe einer geeigneten Parametrisierung von ∂K als Kurve und einmal, indem Sie es mit Hilfe des Satz von Gauß in ein Integral über K umschreiben. Dabei bezeichnet N die äußere Normale.

Tipp:

$$\cos^4 t + \sin^4 t = \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right)^4 + \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right)^4 = \frac{1}{4}\cos 4t + \frac{3}{4}$$

LÖSUNG:

a) Um das Integral auf direktem Weg zu berechnen, geben wir als erstes eine Parametrisierung von ∂K als Kurve an:

$$\gamma : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Bei der Kurve handelt es sich um eine geschlossene Kreiskurve um den Ursprung mit Radius 1. Der Normalenvektor an die Kurve ist der Vektor $N = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$. Somit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int_{\partial K} \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \end{pmatrix} \cdot N \, dl &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos^3 t \\ \sin^3 t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \left\| \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right\| dt \\
&= \int_0^{2\pi} (\cos^4 t + \sin^4 t) dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4}\cos 4t + \frac{3}{4}\right) dt \\
&= \frac{3}{2}\pi
\end{aligned}$$

b) Alternativ kann man das Integral auch mit Hilfe des Satz von Gauß berechnen. Danach gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\partial K} \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \end{pmatrix} \cdot N \, dl &= \int_K \operatorname{div} \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \end{pmatrix} dx \, dy \\
&= \int_K 3x^2 + 3y^2 \, dx \, dy
\end{aligned}$$

Unter Verwendung von Polarkoordinaten folgt

$$\begin{aligned}
\int_{\partial K} \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \end{pmatrix} \cdot N\, dl &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(3\,(r\cos\varphi)^2 + 3\,(r\sin\varphi)^2\right) r\, dr\, d\varphi \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} 3r^3\, d\varphi\, dr \\
&= 6\pi \int_0^1 r^3\, dr \\
&= \frac{3}{2}\pi
\end{aligned}$$

Aufgabe 18: Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von der Kurve

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t + \cos 2t \\ 2\sin t - \sin 2t \end{pmatrix},$$

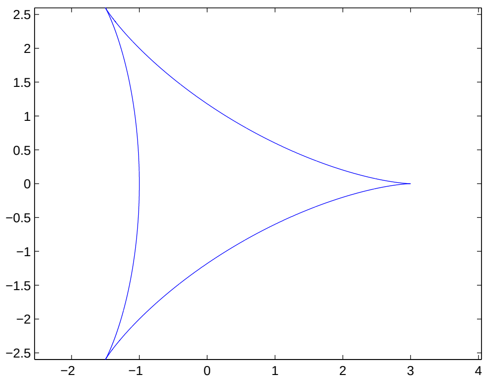
$0 \le t \le 2\pi$ eingeschlossen wird.
Tipp:

$$\cos t \cos 2t = \frac{1}{4}(e^{3it} + e^{-3it} + e^{it} + e^{-it}) = \frac{1}{2}(\cos 3t + \cos t)$$

LÖSUNG: Die Kurve beschreibt eine sog. Hypozykloide:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos t + \cos 2t \\ 2\sin t - \sin 2t \end{pmatrix}, \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

$$\gamma(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix},\ \gamma(\tfrac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \gamma(\pi) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \gamma(\tfrac{3\pi}{2}) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix},\ \gamma(2\pi) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Gesucht: $\mathrm{Vol}_2(\Omega) = \int_\Omega 1\, dx$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}_2(\Omega) &= \int_\Omega 1 dx = \int_\Omega \operatorname{div} F dx\, dy \quad \text{mit div } F = 1, \text{ z.B. } F(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \int_\Gamma F \cdot N\, dl \qquad \text{nach Gauß, wobei } N \text{ äußere Normale} \\
&= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot\gamma_2(t) \\ -\dot\gamma_1(t) \end{pmatrix} \frac{1}{||\dot\gamma(t)||} ||\dot\gamma(t)||\, dt\,, \quad N = \frac{1}{||\dot\gamma(t)||} \begin{pmatrix} \dot\gamma_2(t) \\ -\dot\gamma_1(t) \end{pmatrix} \\
&= \int_0^{2\pi} \gamma_1(t)\dot\gamma_2(t)\, dt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} (2\cos t + \cos 2t)(2\cos t - 2\cos 2t)dt \\
&= \int_0^{2\pi} (4\cos^2 t - 4\cos t\cos 2t + 2\cos t\cos 2t - 2\cos^2 2t)dt
\end{aligned}
$$

$\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) \Rightarrow cos^2 t = \frac{1}{4}(e^{2it} + e^{-2it} + 2) = \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{2}$,

also $\cos t \cos 2t = \dfrac{1}{4}(e^{3it} + e^{-3it} + e^{it} + e^{-it}) = \dfrac{1}{2}(\cos 3t + \cos t)$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \mathrm{Vol}_2(\Omega) &= \int_0^{2\pi} [(2\cos 2t + 2) - (\cos 3t + \cos t) - (\cos 4t + 1)]dt \\
&= 0 + 4\pi - 0 - 0 - 0 - 2\pi \\
&= 2\pi
\end{aligned}
$$

Aufgabe 19: Sei $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit

$$
\gamma(\varphi) = \begin{pmatrix} r(\varphi)\cos\varphi \\ r(\varphi)\sin\varphi \end{pmatrix}
$$

eine Kurve in $\mathbb{R}^2$ mit $r(0) = r(2\pi)$ und $r(\varphi) > 0$, d.h. es ist eine geschlossene Kurve, die gegen den Uhrzeigersinn einmal um den Ursprung verläuft und zu einem Winkel φ den Abstand $r(\varphi)$ zum Ursprung hat. Zeigen Sie mit Hilfe des Gauß'schen Integralsatzes, dass die eingeschlossene Fläche gegeben ist durch

$$
F = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} (r(\varphi))^2\, d\varphi.
$$

LÖSUNG: Kurve $\Gamma : \gamma(\varphi) = \begin{pmatrix} \gamma_1(\varphi) \\ \gamma_2(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(\varphi)\cos\varphi \\ r(\varphi)\sin\varphi \end{pmatrix}$

Normale $N = \dfrac{1}{||\gamma'(\varphi)||}\begin{pmatrix} \gamma_2'(\varphi) \\ -\gamma_1'(\varphi) \end{pmatrix} = \dfrac{1}{||\gamma'(\varphi)||}\begin{pmatrix} r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi \\ -r'(\varphi)\cos\varphi + r(\varphi)\sin\varphi \end{pmatrix}$

Sei Ω die von Γ eingeschlossene Fläche.

Gesucht: $\mathrm{Vol}_2(\Omega) = \displaystyle\int_\Omega 1 dx\, dy$

Setze $F(x, y) = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Dann gilt div $F = 1$ und der Gaußsche Integralsatz liefert:

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega 1 dx\, dy &= \int_\Omega \mathrm{div} F dx\, dy \\
&= \int_\Gamma F \cdot N\, dl \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} r(\varphi)\cos\varphi \\ r(\varphi)\sin\varphi \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\|\gamma'(\varphi)\|}\begin{pmatrix} r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi \\ -r'(\varphi)\cos\varphi + r(\varphi)\sin\varphi \end{pmatrix} \|\gamma'(\varphi)\| d\varphi \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (r(\varphi)\cos\varphi(r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi) \\
&\quad + r(\varphi)\sin\varphi(-r'(\varphi)\cos\varphi + r(\varphi)\sin\varphi))d\varphi \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} r^2(\varphi)\cos^2\varphi + r^2(\varphi)\sin^2\varphi d\varphi \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} r^2(\varphi)\, d\varphi
\end{aligned}
$$

Aufgabe 20: Sei Ω ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^3$ mit glattem Rand, welches den Nullpunkt nicht enthält. Zeigen Sie

$$\int\limits_{\partial\Omega} \frac{x \cdot N}{\|x\|}\, da = 2 \int\limits_{\Omega} \frac{1}{\|x\|}\, dx\ .$$

Dabei bezeichnet N die äußere Normale von $\partial\Omega$.

LÖSUNG: Nach dem Gauß'schen Integralsatz im $\mathbb{R}^3$ gilt:
$\int\limits_{\partial\Omega} F \cdot N da = \int\limits_{\Omega} \operatorname{div} F\, dx$
N = äußere Normale von $\partial\Omega$.
Wähle hier $F(x) := \frac{x}{\|x\|}$ und zeige: $\operatorname{div} F = \frac{2}{\|x\|}$

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} F &= \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_i}{\|x\|}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{3} \left[\frac{1}{\|x\|} - \frac{x_i \cdot x_i}{\|x\|^3}\right] \\
&= \frac{3}{\|x\|} - \sum_{i=1}^{3} \frac{x_i^2}{\|x\|^3} \\
&= \frac{3}{\|x\|} - \frac{\|x\|^2}{\|x\|^3} \\
&= \frac{2}{\|x\|}
\end{aligned}$$