Aufgabe 21: Gegeben seien zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$. Zeigen Sie:

a) Sind beide Matrizen A und B orthognal, so ist auch die Matrix AB orthogonal.

b) Ist die Matrix A orthogonal, dann gilt $|\det A| = 1$.

LÖSUNG:

a) Wir wollen zeigen, dass die Matrix AB orthogonal ist, d.h. $(AB)^T = (AB)^{-1}$.

$$\begin{aligned} (AB)^T AB &= B^T A^T AB \\ &\overset{A \text{ orthogonal}}{=} B^T \mathbb{1} B \\ &= B^T B \\ &\overset{B \text{ orthogonal}}{=} \mathbb{1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad (AB)^T = (AB)^{-1}$$

b) Da die Matrix A orthogonal ist folgt, dass sie auch diagonalisierbar ist.

$$\Rightarrow \quad A = Q^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} Q$$

Die Determinante von A läßt sich also schreiben als

$$\begin{aligned} \det A &= \det Q^{-1} \det \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \det Q \\ &= (\det Q)^{-1} \; \lambda_1 \cdots \lambda_n \; \det Q \\ &= \lambda_1 \cdots \lambda_n \end{aligned}$$

Aus der Vorlesung wissen wir, dass für die Eigenwerte λ_i einer orthogonalen Matrix gilt $|\lambda_i| = 1$.

$$\Rightarrow \quad |\det A| = 1$$

Aufgabe 22: a) Gegeben seien die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ und die beiden Vektoren $x = (1,0,1)^T$, $y = (0,1,1)^T$.

Zeigen Sie, dass der Winkel $\phi := \sphericalangle(x,y)$ zwischen x und y, definiert durch $\cos\phi := \frac{x \cdot y}{\|x\| \ \|y\|}$, gleich dem Winkel $\psi := \sphericalangle(Ax, Ay)$ zwischen Ax und Ay ist.

b) Eine 3×3 Matrix A heißt winkeltreu, falls A invertierbar ist und

$$|\sphericalangle(Ax, Ay)| = |\sphericalangle(x,y)|$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ gilt. Zeigen Sie, dass jede Matrix A der Form $A = \lambda Q$ mit $Q \in O(3)$ und $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ winkeltreu ist.

c) Die Matrix A aus Aufgabenteil a) kann in der Form $A = \lambda Q$ geschrieben werden, wobei $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $Q \in O(3)$. Berechnen Sie diese λ und Q.
Tipp: Berechnen Sie $|\det A|$ unter Berücksichtigung der Tatsache, dass sich die Matrix A schreiben läßt als $A = \lambda Q$ mit $Q \in O(3)$.

LÖSUNG:

a)

$$\begin{aligned}
\|x\| &= \sqrt{2} = \|y\|\,, \\
\cos\phi &= \frac{x \cdot y}{\|x\| \cdot \|y\|} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2}\,. \\
Ax &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \ \|Ax\| = 2\,, \\
Ay &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \ \|Ay\| = 2\,, \\
\cos\psi &= \frac{Ax \cdot Ay}{\|Ax\| \cdot \|Ay\|} = \frac{2}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2} = \cos\phi\,. \quad \checkmark
\end{aligned}$$

b)

$$|\sphericalangle(Ax, Ay)| = |\sphericalangle(x,y)| \quad \Leftrightarrow \quad \frac{Ax \cdot Ay}{\|Ax\| \cdot \|Ay\|} = \frac{x \cdot y}{\|x\| \cdot \|y\|}\,.$$

$A = \lambda Q$ mit $Q \in O(3)$ und $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ impliziert:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow & \|Ax\| = \|\lambda Q x\| = |\lambda| \|Qx\| = |\lambda| \|x\|\,, \\
& \|Ay\| = \|\lambda Q y\| = |\lambda| \|y\|\,, \\
& Ax \cdot Ay = \lambda Qx \cdot \lambda Qy = \lambda^2 (Qx \cdot Qy) = \lambda^2 (x \cdot y)\,, \\
\Rightarrow & \frac{Ax \cdot Ay}{\|Ax\| \cdot \|Ay\|} = \frac{\lambda^2 (x \cdot y)}{|\lambda|^2 \|x\| \cdot \|y\|} = \frac{x \cdot y}{\|x\| \cdot \|y\|}\,, \text{ da } \lambda^2 = |\lambda|^2\,.
\end{aligned}$$

Da $\lambda \neq 0$ ist A offensichtlich invertierbar. $(A^{-1} = \lambda^{-1} Q^T)$

c) Allgemein gilt: $A = \lambda Q$

$$\Rightarrow \det A \quad = \quad \det(\lambda Q) = \lambda^n \det Q$$

Wir wissen: $|\det Q| = 1$. Also folgt

$$\begin{aligned} |\det A| &= |\lambda|^n \\ \Leftrightarrow \quad |\det A|^{\frac{1}{n}} &= |\lambda| \end{aligned}$$

Hier in unserem Beispiel gilt: $\det A = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} = 2^{3/2} > 0$.
Behauptung: $\lambda = \sqrt{2} = 2^{1/2}$. Denn

$$(\det A)^{1/3} = \left(2^{3/2}\right)^{1/3} = 2^{1/2} = \sqrt{2}$$

und

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \underbrace{\sqrt{2}}_{\lambda} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}}_{Q \in O(3)\,!} .$$

Beachte: $\lambda = \sqrt{2} =$ Länge der Spaltenvektoren von A!

Im Allgemeinen muss man das Vorzeichen von λ prüfen. Hier ist das klar wegen $n = 3$!

Aufgabe 23: Welche Aussagen sind richtig?

a) Die Eigenwerte einer Drehmatrix sind stets ± 1.
ja □ nein □

b) Die Eigenwerte einer Spiegelungsmatrix sind stets ± 1.
ja □ nein □

c) Die Eigenwerte einer beliebigen orthogonalen Matrix sind stets ± 1.
ja □ nein □

d) Die Determinante einer beliebigen orthogonalen Matrix ist ± 1.
ja □ nein □

e) Jede längentreue (d.h. orthogonale) lineare Abbildung ist auch winkeltreu.
ja □ nein □

f) Jede winkeltreue lineare Abbildung ist auch längentreu.
ja □ nein □

LÖSUNG:

a) Nein! In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Eigenwerte einer Drehmatrix komplex sein können.

b) Ja! Siehe einleitendes Beispiel im Kapitel Diagonalisierung.
Alternativ: Aus der Vorlesung wissen wir, dass die Spiegelungsmatrix eine orthogonale Matrix ist. Zudem wissen wir, dass der Betrag der Eigenwerte einer orthogonalen Matrix jeweils 1 ist. Da die Spiegelungsmatrix zudem symmetrisch ist und nur reelle Einträge hat, kann sie nur reelle Eigenwerte haben. Somit müssen die Eigenwerte ± 1 sein.

c) Nein! Wie im Fall der Drehmatrix können die Eigenwerte auch komplex sein.

d) Ja! Siehe Vorlesung.

e) Ja! Siehe Vorlesung.

f) Nein! Die Matrix $A = 2\mathbb{1}$ ist zwar winkeltreu aber nicht längentreu.

Aufgabe 24: Es seien $u,\, v \in \mathbb{R}^d$ mit $u \neq v$ und $||u|| = ||v||$. Weiter sei $n := u - v$.

a) Zeigen Sie, dass für die durch $S_n x := x - 2\frac{x \cdot n}{||n||^2} n$ definierte Spiegelungsmatrix S_n gilt $S_n u = v \quad \text{und} \quad S_n v = u$.

b) Sei $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie v der Form $v = \begin{pmatrix} * \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\|u\| = \|v\|$. Berechnen Sie die Matrix S_{u-v} aus Aufgabenteil (a).

c) Multiplizieren Sie diese Matrix von links an die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

LÖSUNG:

a)

$$\begin{aligned}
S_n u &= u - 2\frac{u \cdot n}{\|n\|^2} n = u - \frac{2u \cdot (u-v)}{\|u-v\|^2} \cdot (u-v) \\
2u \cdot (u-v) &= 2\|u\|^2 - 2u \cdot v\,. \\
\|u-v\|^2 &= \|u\|^2 - 2u \cdot v + \|v\|^2 = 2\|u\|^2 - 2u \cdot v \quad \text{wegen } \|u\| = \|v\|\,. \\
\Rightarrow\ S_n u &= u - (u-v) = u - u + v = v\,.
\end{aligned}$$

Ebenso gilt:

$$S_n v = u\,,$$

wegen $2v \cdot n = 2v \cdot (u-v) = 2uv - 2\|v\|^2$ und $\|u\|^2 - 2uv + \|v\|^2 = 2\|v\|^2 - 2uv = \|u-v\|^2$.

b)

$$\begin{aligned}
\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| &= \left\| \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \\
\Leftrightarrow\ \sqrt{1^2 + (-1)^2} &= |\alpha| \\
\Leftrightarrow\ \sqrt{2} &= |\alpha|
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad v = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Um die Matrix S_{u-v} berechnen zu können, führen wir zuerst ein paar Nebenrechnungen durch:

$$u - v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(u-v)(u-v)^T = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2}, & -1, & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\sqrt{2})^2 & \sqrt{2}-1 & 0 \\ \sqrt{2}-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \|u-v\|^2 &= \left\| \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2 \\ &= \left(1-\sqrt{2}\right)^2 + (-1)^2 \\ &= 1 - 2\sqrt{2} + 2 + 1 \\ &= 4 - 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow S_{u-v} &= \mathbb{1} - 2\frac{(u-v)(u-v)^T}{\|u-v\|^2} \\ &= \mathbb{1} - \frac{1}{2-\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (1-\sqrt{2})^2 & \sqrt{2}-1 & 0 \\ \sqrt{2}-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{(1-\sqrt{2})^2}{2-\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}} & 1 - \frac{1}{2-\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}} & \frac{1-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} & \frac{1-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} S_{u-v}A &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$