Aufgabe 25: Es sei $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie $\mathbf{B} = e^{t\mathbf{A}}$.

b) Bestimmen Sie $\mathbf{B}^{-1}$. Welche Matrix erhalten Sie?

c) Zeigen Sie $\mathbf{B}^{-1} = e^{t\mathbf{A}^T} = (e^{t\mathbf{A}})^T$.

LÖSUNG:

a)

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathbb{1}\,, \\ A^3 &= AA^2 = A \cdot (-\mathbb{1}) = -A\,, \\ A^4 &= AA^3 = A \cdot (-A) = -A^2 = \mathbb{1}\,, \\ A^5 &= AA^4 = A \cdot \mathbb{1} = A\,. \end{aligned}$$

Ab hier wiederholt sich alles!

$$\begin{aligned} \Rightarrow A^k &= \begin{cases} A & \text{für} \quad k = 4l+1\,,\ l = 0,1,2,\ldots \\ -\mathbb{1} & \text{für} \quad k = 4l+2\,,\ l = 0,1,2,\ldots \\ -A & \text{für} \quad k = 4l+3\,,\ l = 0,1,2,\ldots \\ \mathbb{1} & \text{für} \quad k = 4l+4\,,\ l = 0,1,2,\ldots \end{cases} \\ \Rightarrow B &= e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} = \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l t^{2l}}{(2l)!} \right) \mathbb{1} + \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l t^{2l+1}}{(2l+1)!} \right) A \\ &= \cos t \cdot \mathbb{1} + \sin t \cdot A = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Alternativer Lösungsweg:
Die Eigenwerte der Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ sind $\lambda_1 = -i$ und $\lambda_2 = i$. Die zugehörigen Eigenvektoren sind $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$. Demnach lässt sich die Matrix A schreiben als

$$\begin{aligned} A &= C \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} C^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow e^{At} &= C \begin{pmatrix} e^{-it} & 0 \\ 0 & e^{it} \end{pmatrix} C^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) Man rechnet leicht nach, dass

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} = B^T\,.$$

c) Es gilt $B^{-1} = B^T$, also ist B orthogonal.

$$\Rightarrow B^{-1} = B^T = \left(e^{tA}\right)^T = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}\right)^T = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k (A^T)^k}{k!} = e^{tA^T} = e^{-tA} = \left(e^{tA}\right)^{-1} .$$

Aufgabe 26: Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe der QR-Zerlegung.

LÖSUNG: Sei $A = (a_1 \,|\, a_2)$. Gesucht ist eine Matrix $Q^{(1)}$ mit

$$Q^{(1)} a_1 = \alpha_1 \, e_1 \,,$$

wobei $Q^{(1)} = \mathbb{1} - 2\frac{v_1 v_1^T}{\|v_1\|^2}$ eine Spiegelung an der Ebene $\{x \cdot v_1 = 0\}$ darstellt.
Dazu muss v_1 im Span von $a_1 - \alpha_1 e_1$ liegen, o.B.d.A. $v_1 = a_1 - \alpha_1 e_1$.

Da $Q^{(1)}$ orthogonal, gilt $|\alpha_1| = \|\alpha_1 e_1\| = \|Q a_1\| = \|a_1\| = 5$, laut Skript ist $\alpha_1 = -\mathrm{sgn}(A_{11})|\alpha_1| = 5$ eine stabile Wahl.

Es folgt also $v_1 = a_1 - \alpha_1 e_1 = (-8, 4)^T$ und somit

$$Q^{(1)} = \mathbb{1} - 2\frac{v_1 v_1^T}{\|v_1\|^2} = \mathbb{1} - \frac{2}{80}\begin{pmatrix} 64 & -32 \\ -32 & 16 \end{pmatrix} = \mathbb{1} - \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Anwendung auf das LGS $Ax = b$:

$$Q^{(1)} a_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Q^{(1)} a_2 = a_2 - \frac{2(a_2 \cdot v_1)}{80} v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{2 \cdot (-20)}{80}\begin{pmatrix} -8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Q^{(1)} b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{(es gilt } Q^{(1)} b = b, \text{ da } b \perp v_1)$$

Dann folgt

$$R = QA = Q^{(1)} A = \left(Q^{(1)} a_1 \,\middle|\, Q^{(1)} a_2\right) = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad y = Qb = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Löse $Rx = y$ durch Rückwärtseinsetzen:

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Also $x_2 = 2$ und $5x_1 - 4 = 1$, d.h. $x = (1, 2)^T$.

Aufgabe 27: Berechnen Sie mittels QR-Zerlegung die Lösung des Gleichungssystems

$$Ax = b \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 6 \\ -2 & 4 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

LÖSUNG: (1) Wähle $\alpha_1 = -\mathrm{sgn}(A_{11})\|a_1\| = -3$.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1-(-3) \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad Q^{(1)} = \mathbb{1} - 2\frac{v_1 v_1^T}{\|v_1\|^2}.$$

Anwendung auf das LGS $Ax = b$, mit $\|v_1\|^2 = v_1^T v_1 = 24$:

$$Q^{(1)} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{12}{12} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$Q^{(1)} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} - \frac{0}{12} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$
$$Q^{(1)} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{18}{12} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$Q^{(1)} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix} - \frac{6}{12} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}$$

also

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} -3 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \quad b^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

(2) Wähle $\alpha_2 = -5$.

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad Q^{(2)} = \mathbb{1} - 2\frac{v_2 v_2^T}{\|v_2\|^2}.$$

wobei $\|v_2\|^2 = v_2^T v_2 = 90$. Anwendung auf das LGS $A^{(1)}x = b^{(1)}$:

$$Q^{(2)} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$Q^{(2)} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} - \frac{45}{45} \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$Q^{(2)} \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{45}{45} \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$
$$Q^{(2)} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix} + \frac{45}{45} \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

also

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} -3 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad b^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Durch Rückwärtseinsetzen in $A^{(2)}x = b^{(2)}$ folgt

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 28: a) Schreiben Sie eine Matlab Funktion *QRSolve(A,b)*, die unter Verwendung der Funktion *QRDecomposition* aus der Vorlesung das Gleichungssystem $Ax = b$ löst.

b) Testen sie diese Funktion anhand der Beispiele

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -11 \\ 11 \end{pmatrix}$$

LÖSUNG:

a)
```
function x = QRSolve( A, b)
% solves the system Ax=b by using QR decomposition

[m,n]=size(A);

% auxiliary function: apply Q
function x = ApplyQ( k, alpha, v, x )
    s = 0;
    n = size(v);
    for l = k:n
        s = s + v(l)*x(l);
    end
    s = s / (alpha*v(k));
    for l=k:n
        x(l) = x(l) + s*v(l);
    end
end


% QR decomposition
[A,alpha]=QRDecomposition(A);

% we have to solve the system Rx=Q^Tb, thus we have to compute Q^Tb
for i = 1:n-1
    b = ApplyQ(i, alpha(i), A(:,i), b);
end

[alphaM,alphaN] = size(alpha);

% now we solve the system Rx=Q^Tb
```

```
x(m) = b(m) / A(m,m);
for k = m-1:-1:1
    s = b(k);
    for j = k+1:n
        s = s - A(k,j)*x(j);
    end
    x(k) = s/alpha(k);
end

end
```

b) Als Lösung des 2×2 Gleichungssystems ergibt sich $x = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und als Lösung des 3×3 Gleichungssystems ergibt sich $x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.