Aufgabe 29: Bestimmen Sie $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ so, daß

$$f(x,y) = \left\| \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 6 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 45 \end{pmatrix} \right\|^2$$

minimal wird.

Berechnen Sie den Wert der Funktion f an dieser Stelle.

Aufgabe 30: Orthonormalisieren Sie im $\mathbb{R}^4$ die Vektoren:

$$a_1 = (1,1,0,0)^T, \quad a_2 = (1,0,1,0)^T \quad a_3 = (0,0,1,0)^T$$

Ergänzen Sie zu einer Orthonormalbasis im $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 31: Betrachten Sie die von den Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ \sqrt{8} \end{pmatrix}$ aufgespannte Ebene durch den Ursprung.

a) Berechnen Sie eine Orthonormalbasis der Ebene.

b) Berechnen Sie mit Hilfe der Orthonormalbasis die Projektion des Punktes $p = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ auf diese Ebene.

c) Geben Sie die Ebene in der Form $\{x | x \cdot n = d\}$ an.

d) Berechnen Sie mit Hilfe von n erneut die Projektion des Punktes $p = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ auf diese Ebene.

Aufgabe 32: Thema: Eigenschaften schiefsymmetrischer Matrizen

Sei A eine reelle $n \times n$ Matrix mit $A^T = -A$, d. h. A ist schiefsymmetrisch. Welche Aussagen sind richtig?

a) Die Spur von A, $\operatorname{tr} A$, ist gleich null. ja □ nein □

b) Es gilt $\det A = 0$ für $n = 2$. ja □ nein □

c) Es gilt $\det A = 0$ für $n = 3$. ja □ nein □

d) Es gilt $Ax \cdot x = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. ja □ nein □

e) Wenn $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A ist, dann folgt $\lambda = 0$. ja □ nein □

f) $\exp A$ ist eine orthogonale Matrix. ja □ nein □

g) Es gilt $\det(\exp A) = 1$. ja □ nein □

Aufgabe 33: Thema: Orthonormalsystem und orthogonale Projektion

Sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt und $U = \operatorname{span}\{u_1, ..., u_n\}$ ein Unterraum, wobei $\{u_1, ..., u_n\}$ ein Orthonormalsystem sei. Welche Aussagen sind richtig?

a) Wenn $v \in V$ und $v \cdot u_i = 0$ für $i = 1, ..., n$, dann ist $v = 0$. ja □ nein □

b) Die orthogonale Projektion $Pv \in U$ eines Vektors $v \in V$ ist eindeutig bestimmt und es gilt: $Pv = \sum_{i=1}^n (v \cdot u_i) u_i$. ja □ nein □

c) Für $v, w \in V$ gilt: $Pv \cdot Pw = \sum_{i=1}^n (v \cdot u_i)(w \cdot u_i)$. ja □ nein □

d) Wenn $v \in V$, dann gilt: $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^n (v \cdot u_i)^2$. ja □ nein □

e) Wenn $v \in U$, dann gilt: $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^n (v \cdot u_i)^2$. ja □ nein □