Aufgabe 37: Berechnen Sie den kritischen Punkt der Funktion

$$f(x, y) = 3x^2 - 5xy - 2y^2 + 3$$

und entscheiden Sie, ob ein Maximum, Minimum oder Sattelpunkt vorliegt.

Aufgabe 38:

a) Berechnen Sie die kritischen Punkte der Funktion

$$f_\alpha(x, y) = x^3 - y^3 + 3\alpha xy$$

in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und entscheiden Sie jeweils, ob ein Maximum, Minimum oder Sattelpunkt vorliegt.

b) Bestimmen Sie die lokalen Maxima und Minima der durch

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

gegebenen Funktion.

Aufgabe 39: Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \sin(x) \cos(y)$$

und finden Sie im Intervall $[0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$ Minima, Maxima und Sattelpunkte von f.

Aufgabe 40: Sei $x_0 \in \mathbb{R}^3$ und

$$Z = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1^2 + x_2^2 = 1\}.$$

Finden Sie $x_Z \in Z$, so dass

$$\|x_0 - x_Z\| \leq \|x_0 - x\|$$

für alle $x \in Z$.

a) Stellen Sie x_0 und ein beliebiges $x \in Z$ in Zylinderkoordinaten dar.

b) Geben Sie den Abstand $\|x_0 - x\|^2$ als Funktion $d(\varphi, z)$ an.

c) Bestimmen Sie die kritischen Punkte der Funktion $d(\varphi, z)$.

d) Berechnen Sie die Hessematrix von $d(\varphi, z)$.

e) Bestimmen Sie das Minimum der Funktion $d(\varphi, z)$.