Aufgabe 41: Entwicklen Sie die Funktion

$$f(x,y,z) = -\sqrt{1-x^2+y^2+z^2}$$

nach Taylor an der Stelle $(0,0,0)$ bis einschließlich Terme zweiter Ordnung.

LÖSUNG:

- $f(0,0,0) = -1$
- $\operatorname{grad} f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2+y^2+z^2}} \begin{pmatrix} x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{grad} f(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $D^2 f(x,y,z) = \frac{1}{(1-x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} 1+y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2-1-z^2 & yz \\ -xz & yz & x^2-y^2-1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow D^2 f(0,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- $f(\xi,\eta,\zeta) = -1 + \frac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2 - \zeta^2) + \mathrm{O}((\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^{3/2})$

Aufgabe 42: Entwicklen Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; x \mapsto e^{-\|x-x_0\|^2}$$

nach Taylor an der Stelle $x = x_0$ bis einschließlich Terme zweiter Ordnung.

LÖSUNG:

- Zunächst sehen wir $f(x_0) = e^{-\|x_0-x_0\|^2} = e^0 = 1$
- Berechnung des Gradienten: $\operatorname{grad} f(x) = -2e^{-\|x-x_0\|^2}(x-x_0) \Rightarrow \operatorname{grad} f(x_0) = \mathbf{0}$
- Berechnung der zweiten Ableitungen: $D^2 f(x) = -2e^{-\|x-x_0\|^2} \cdot \mathbb{1} + 4e^{-\|x-x_0\|^2}(x-x_0)(x-x_0)^T$

$$\Rightarrow \quad D^2 f(x_0) = -2 \cdot \mathbb{1}$$

- Somit gilt

$$\begin{aligned} f(x_0+\xi) &= 1 + \frac{1}{2}(x_0+\xi-x_0)^T(-2\mathbb{1})(x_0+\xi-x_0) + \mathrm{O}(\|\xi\|^3) \\ &= 1 - (\xi)^T(\mathbb{1})(\xi) + \mathrm{O}(\|\xi\|^3) \\ &= 1 - \|\xi\|^2 + \mathrm{O}(\|\xi\|^3) \end{aligned}$$

Aufgabe 43: Sei $a \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Entwicklen Sie die Funktion $f(x) = \|x-a\|$ nach Taylor an der Stelle x_0 bis einschließlich Terme zweiter Ordnung.

Lösung:

$$f(x) = \|x-a\| = \left((x_1-a_1)^2 + (x_2-a_2)^2 + \ldots + (x_n-a_n)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

setze $x = x_0 + h, h \in \mathbb{R}^n$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \text{grad } f(x_0)\cdot h + \frac{1}{2}D^2 f(x_0)h\cdot h + O(\|h\|^3)$$

$$\begin{aligned}
\text{grad } f(x) &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}f(x), \frac{\partial}{\partial x_2}f(x), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}f(x)\right)^T \\
&= \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\|x-a\|}\cdot 2(x_1-a_1), \ldots, \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\|x-a\|}\cdot 2(x_n-a_n)\right)^T \\
&= \left(\frac{x_1-a_1}{\|x-a\|}, \ldots, \frac{x_n-a_n}{\|x-a\|}\right)^T = \frac{1}{\|x-a\|}(x-a)
\end{aligned}$$

$$H(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}f(x) & \frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}f(x) & \ldots & \frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_n}f(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}f(x) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}f(x) &= \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{(x_i-a_i)}{f(x)} \\
&= \frac{1}{f(x)} - \frac{(x_i-a_i)(x_i-a_i)}{f^3(x)} \\
&= \frac{1}{\|x-a\|} - \frac{1}{\|x-a\|^3}(x_i-a_i)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}f(x) = \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x)^3}(x_i-a_i)^2 \\
i \neq j: \quad &\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}f(x) = \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{(x_i-a_i)}{f(x)} \\
&= -\frac{1}{f^3(x)}(x_i-a_i)(x_j-a_j) \\
&= -\frac{(x_i-a_i)(x_j-a_j)}{\|x-a\|^3}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow H(x) = \frac{1}{\|x-a\|}\left(\mathbb{1} - \frac{(x-a)}{\|x-a\|}\frac{(x-a)^T}{\|x-a\|}\right)$$

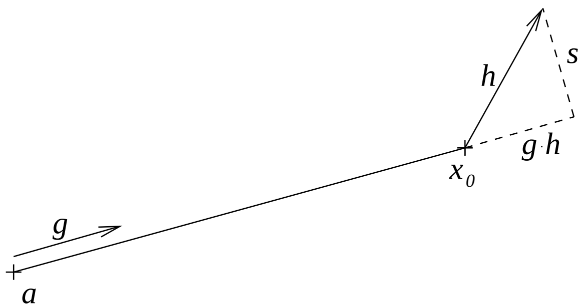
Insgesamt ergibt sich

$$f(x_0+h) = \|x_0-a\| + \frac{(x_0-a)}{\|x_0-a\|}\cdot h + \frac{1}{2\|x_0-a\|}\left(\mathbb{1} - \frac{(x-a)}{\|x-a\|}\frac{(x-a)^T}{\|x-a\|}\right)h\cdot h + O(\|h\|^3)$$

Zusätzliche Erläuterung: (Nicht Teil der Lösung!)
Mit der Bezeichnung $g = \text{grad } f(x_0)$ erhalten wir

$$f(x_0+h) = f(x_0) + g\cdot h + \frac{1}{2\|x_0-a\|}\left(\|h\|^2 - (g\cdot h)^2\right) + (\|h\|^3)\,.$$

Dabei ist offenbar $\|g\| = 1$, also ist g der Einheitsvektor, der von a in Richtung x_0 zeigt. Der lineare Term (also die Approximation der Änderung in erster Ordnung) ist daher die Projektion von h auf die Gerade durch x_0 und a. Hier spielt also nur der Anteil von h eine Rolle, der auf a zu oder von a weg zeigt, nicht der Anteil „seitwärts“.
In ähnlicher Weise erklärt sich der quadratische Term: Mit $s^2 = \|h\|^2 - (g \cdot h)^2$ ist s der „Seitwärts-Anteil“ von h (Pythagoras!). Der Term zweiter Ordnung berücksichtigt also die Änderung „seitwärts“.
Die Skalierung überlegt man sich beispielweise folgendermaßen: Mit $a = (0,0)^T$, $x_0 = (1,0)^T$ und $h = (t,s)^T$ erhält man $f(x_0 + h) = 1 + t + \frac{1}{2}s^2 + O(\|h\|^3)$. Zu $x_0 = (L,0)^T$ erhält man die skalierte Gleichung $\frac{f(x_0+h)}{L} = 1 + \frac{t}{L} + \frac{1}{2}\left(\frac{s}{L}\right)^2 + O(\|h\|^3)$. Multiplikation mit $L = \|x_0 - a\|$ ergibt schließlich die obige Form.



Aufgabe 44: Bestimmen Sie für die Funktion

$$g(x,y) = \sqrt{r^2 - (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2}, \quad 0 < r < R,$$

die Taylor-Entwicklung an der Stelle $(R,0)$ mit Restglied der Ordnung 3.
Tipp: Finden Sie eine Funktion $h(\cdot)$, so dass $g(x,y) = h(d(x,y))$ mit $d(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

LÖSUNG: $g(x,y) = h(d(x,y))$ mit $d(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ und $h(\rho) = \sqrt{r^2 - (\rho - R)^2} \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
g_x(x,y) &= h'(d(x,y))\, d_x(x,y) \\
g_y(x,y) &= h'(d(x,y))\, d_y(x,y) \\
g_{xx}(x,y) &= h''(d(x,y))\, d_x(x,y)^2 + h'(d(x,y))\, d_{xx}(x,y) \\
g_{xy}(x,y) &= h''(d(x,y))\, d_x(x,y)\, d_y(x,y) + h'(d(x,y))\, d_{xy}(x,y) \\
g_{yy}(x,y) &= h''(d(x,y))\, d_y(x,y)^2 + h'(d(x,y))\, d_{yy}(x,y)
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
d_x(x,y) &= \frac{x}{d(x,y)} \\
d_y(x,y) &= \frac{y}{d(x,y)} \\
d_{xx}(x,y) &= \frac{y^2}{d(x,y)^3} \\
d_{xy}(x,y) &= -\frac{xy}{d(x,y)^3} \\
d_{yy}(x,y) &= \frac{x^2}{d(x,y)^3}
\end{aligned}$$

und

$$
\begin{aligned}
h'(\rho) &= \frac{R-\rho}{h(\rho)}\\
h''(\rho) &= -\frac{r^2}{h(\rho)^3}
\end{aligned}
$$

An der Stelle $(R,0)$:

$$
\begin{aligned}
&d(R,0) = R\\
&d_x(R,0) = 1\\
&d_y(R,0) = 0\\
&d_{xx}(R,0) = d_{xy}(R,0) = 0\\
&d_{yy}(R,0) = \frac{R^2}{R^3} = \frac{1}{R}
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
&h(d(R,0)) = h(R) = r\\
&h'(R) = 0\\
&h''(R) = -\frac{r^2}{r^3} = -\frac{1}{r}
\end{aligned}
$$

Es folgt

$$
\begin{aligned}
&g(R,0) = h(d(R,0)) = r\\
&g_x(R,0) = h'(R)\,d_x(R,0) = 0\\
&g_y(R,0) = h'(R)\,d_y(R,0) = 0\\
&g_{xx}(R,0) = -\frac{1}{r}\cdot 1^2 + 0\cdot 0 = -\frac{1}{r}\\
&g_{xy}(x,y) = -\frac{1}{r}\cdot 1\cdot 0 + 0\cdot 0 = 0\\
&g_{yy}(x,y) = -\frac{1}{r}\cdot 0^2 + 0\cdot\frac{1}{R} = 0
\end{aligned}
$$

Die Taylor-Entwicklung ist dann

$$
g(x,y) = r - \frac{1}{2r}(x-R)^2 + \mathrm{O}(\|(x-R,y)\|^3)
$$