Einführung in die Grundlagen der Numerik

Wintersemester 2018/19
Prof. Dr. Ira Neitzel
Fabian Hoppe

UNIVERSITÄT BONN

Übungsblatt 0. Präsenzübung in der 2. Woche (keine Abgabe!)

Aufgabe 1. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$x \mapsto \frac{1}{2}x^T Qx + p^T x, \qquad Q = Q^T \in \mathbb{R}^{n\times n}, p \in \mathbb{R}^n.$$

a. Berechnen Sie alle Frechet-Ableitungen von f.

b. Untersuchen Sie f auf kritische Punkte, d.h. auf $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\nabla f(x) = 0$.

c. Wie kann man die Art des kritischen Punkts (lokales/globales Minimum, Maximum, Sattelpunkt) durch geeignete Bedingungen an Q bzw. p weiter charakterisieren?

   Hinweis: Spektralsatz für symmetrische Matrizen

Aufgabe 2. Sei $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \mapsto Mx + c$ mit $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $c \in \mathbb{R}^n$, derart, dass die Fixpunktiteration $x_{k+1} := \varphi(x_k)$ für jeden Startwert $x_0 \in \mathbb{R}^n$ konvergiert.
Man zeige, dass auch die Fixpunktiteration $x_{k+1} := \psi(x_k)$ mit

$$\psi(x) := \lambda x + (1-\lambda)Mx + (1-\lambda)c, \qquad \lambda \in (0,1),$$

gegen *denselben* Fixpunkt konvergiert.
Hinweis: Spektralradius

Aufgabe 3. Gegeben sei die Matrix $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Untersuchen Sie, ob das Jacobi- bzw. das Gauss-Seidel-Verfahren für A konvergieren.

Aufgabe 4. Aus der Analysis I Vorlesung dürfte bekannt sein, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \exp(-1/x^2)$ unendlich oft differenzierbar ist, wenn man $f(0) := 0$ setzt. Der Nullpunkt ist außerdem die einzige Nullstelle von f.
Geben Sie die Iterationsvorschrift des Newton-Verfahrens für die Lösung der Gleichung $f(x) = 0$ an. Angenommen die Iteration konvergiert, welche Konvergenzordnung kann man erwarten?