Prof. Dr. Ira Neitzel
Fabian Hoppe

UNIVERSITÄT BONN

Übungsblatt 10.

Abgabe am **20. Dezember vor der Vorlesung**.

Aufgabe 1. Es sei die (nicht symmetrische!) Tridigonalmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 2^1 & -2^{-2} & & & & \\ 2^{-2} & 2^2 & -2^{-1} & & & \\ & 2^{-1} & 2^3 & -2^0 & & \\ & & 2^0 & 2^4 & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & -2^{n-4} \\ & & & & 2^{n-4} & 2^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

gegeben.
Auf der Hauptdiagonalen finden sich die Zweierpotenzen $2^1, 2^2, 2^3, \dots$ bis 2^n; auf den Nebendiagonalen stehen die Zweierpotenzen $2^{-2}, 2^{-1}, 2^0, \dots$ bis 2^{n-4} mit positivem Vorzeichen (untere Nebendiagonale) bzw. negativem Vorzeichen (obere Nebendiagonale).

a) Zeigen Sie: A hat n einfache reelle Eigenwerte.

b) Schätzen Sie die Konditionszahl (bzgl. der euklidischen Norm) von A ab.

(3 + 2 = 5 Punkte)

Aufgabe 2. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch mit größtem Eigenwert $\lambda_1 \in \mathbb{R}$. Sei nun (ähnlich zu einer früheren Definition) für ein $z \in \mathbb{R}^n$ und $k \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{K}_k(A, z) := \operatorname{span}\left\{z, Az, \dots, A^{k-1}z\right\}$$

der k-te Krylovraum von A bzgl. z und $W_k \in \mathbb{R}^{n \times k}$ eine Matrix, deren Spalten eine Orthonormalbasis von $\mathcal{K}_k(A, z)$ bilden. Ferner sei $\mu_1^{(k)}$ der größte Eigenwert der ebenfalls symmetrischen Matrix $W_k^T A W_k \in \mathbb{R}^{k \times k}$.

a) Zeigen Sie: Es gilt $\lambda_1 \geq \mu_1^{(k)}$ für alle $1 \leq k \leq n$ und $\mu_1^{(k)}$ ist unabhängig von der konkreten Wahl der Orthonormalbasis für $\mathcal{K}_k(A, z)$.

b) Können Sie $\mu_1^{(k)}$ in Relation zu den Näherungen $\nu_1^{(k)}$ für λ_1, die durch die Vektoriteration mit Startvektor z generiert werden, setzen?

(4 + 3 = 7 Punkte)

Aufgabe 3. Es sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $A = U\Sigma V^T$ die Singulärwertzerlegung von A mit

$$\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{m\times n} \text{ mit } \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0, \quad r := \mathrm{rank}(A),$$

und orthogonalen Matrizen

$$U = (u_1, u_2, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^{m\times m}, \qquad V = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

wobei u_i bzw. v_i jeweils die Spaltenvektoren von U bzw. V bezeichnen.
Für $1 \leq k < r$ definieren wir

$$A_k := \sum_{i=1}^{k} \sigma_i u_i v_i^T.$$

a) Beweisen Sie, dass A_k die Rang-k-Bestapproximation von A ist, d.h. dass

$$\min_{\mathrm{Rang}(B)=k} \|A - B\|_2 = \|A - A_k\|_2 = \sigma_{k+1}.$$

erfüllt ist.

Hinweis: $\|\cdot\|_2$ bezeichnet die von der euklidischen 2-Norm $\|\cdot\|_2$ induzierte Operatornorm ("Spektralnorm").

b) Wie könnte man dementsprechend vorgehen, um bei der Speicherung von A Platz zu sparen?

(6 + 2 = 8 Punkte)