Einführung in die Grundlagen der Numerik

Wintersemester 2018/19
Prof. Dr. Ira Neitzel
Fabian Hoppe

UNIVERSITÄT BONN

Übungsblatt 2.

Abgabe am **25. Oktober vor der Vorlesung**.

Bitte beachten: Die Abgabe der Übungsblätter soll in Gruppen von jeweils 3 Studierenden erfolgen.

Aufgabe 1.

a. Berechnen Sie die QR-Zerlegung folgender Matrix mittels Householder-Transformationen:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Geben Sie $\hat{Q}, \hat{R}$ sowie die verwendeten Householder-Transformationen an.

b. Nutzen Sie die QR-Zerlegung aus Aufgabenteil a) um Aufgabe 3c) von Übungblatt Nr. 1 nocheinmal zu lösen.

(3+2 Punkte)

Aufgabe 2. (Kondition des linearen Ausgleichsproblems I)

Es sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $m \geq n$ und A habe vollen Rang n.

a. Zeigen Sie, dass die relative Konditionszahl *für die Abhängigkeit von b* des QR-basierten Lösungsverfahrens für das lineare Ausgleichsproblem

$$\min \|Ax - b\|_2$$

durch $\frac{\kappa(\hat{R})}{\cos\phi}$ beschränkt ist, wobei ϕ der Winkel zwischen b und $\mathrm{im}(A)$ ist und $\kappa(\hat{R})$ die relative Konditionszahl von $\hat{R}$ bezeichnet.

b. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis aus Aufgabenteil a) mit der relativen Konditionszahl *für die Abhängigkeit von b* des Lösungsverfahrens mittels Normalengleichung.

Hinweis: Die relativen Konditionszahlen sind hier im Bezug auf die euklidische Norm $\|\cdot\|_2$ definiert.

(3+3 Punkte)

Aufgabe 3. Sei $\alpha \in [0, 2\pi)$. Zeigen Sie, dass

$$T := \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

eine orthogonale Matrix ist und bestimmen Sie ggf. vorhandene (reelle/komplexe) Eigenwerte.
Ist jede orthogonale 2×2-Matrix von dieser speziellen Gestalt?

(2 Punkte)

Aufgabe 4. (Kondition des linearen Ausgleichsproblems II)

Es sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $m \geq n$ und A habe vollen Rang n. Im Folgenden definieren wir die Konditionszahl $\kappa(A)$ für solche nicht-quadratische Matrizen als

$$\kappa(A) := \frac{\max_{\|x\|=1}\|Ax\|}{\min_{\|x\|=1}\|Ax\|}$$

a. Zeigen Sie, dass obige Definition der Konditionszahl für invertierbares A mit der alten Definition aus der Algorithmischen Mathematik I/II übereinstimmt.

   Zeigen Sie ferner, dass $\kappa(A) = \kappa(\hat{R})$ gilt, wobei $A = \hat{Q}\hat{R}$ die reduzierte QR-Zerlegung von A ist.

b. Die relative Konditionszahl des linearen Ausgleichsproblems *für die Abhängigkeit von* A, d.h. die relative Konditionszahl der Abbildung

$$g : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^n, A \mapsto x_{\min}(A) := \underset{x\in\mathbb{R}^n}{\operatorname{argmin}}\|Ax - b\|_2^2 = (A^TA)^{-1}A^Tb,$$

   ist definiert durch

$$\kappa_{\text{Ausgl}}(A) := \frac{\|A\|_2}{\|x_{\min}(A)\|_2}\|g'(A)\|_2.$$

   Zeigen Sie, dass

$$\kappa_{\text{Ausgl}}(A) \leq \kappa(A) + \kappa(A)^2\frac{\|Ax_{\min}(A) - b\|_2}{\|A\|_2\|x_{\min}(A)\|_2}$$

   gilt, wobei $\kappa(A)$ die Konditionszahl der Matrix A (siehe oben) bezeichnet.

   Hinweis: $\|\cdot\|_2$ steht hier simultan für die euklidische Norm von Vektoren, die induzierten Matrixnormen bzw. die von diesen Matrixnormen induzierten Normen auf Räumen linearer Abbildungen zwischen Matrizen.

c. Zeigen Sie

$$\tan\phi \geq \frac{\|Ax_{\min}(A) - b\|_2}{\|A\|_2\|x_{\min}(A)\|_2},$$

   wobei ϕ der Winkel zwischen b und $\operatorname{im}(A)$ ist.

   Interpretieren Sie dies im Bezug auf b).

(2+3+2 Punkte)