Einführung in die Grundlagen der Numerik

Wintersemester 2018/19
Prof. Dr. Ira Neitzel
Fabian Hoppe

UNIVERSITÄT BONN

Übungsblatt 7.

Abgabe am **29. November vor der Vorlesung**.

Aufgabe 1. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar und $b \in \mathbb{R}^n$.

a) Geben Sie die Anzahl der arithmetischen Operationen für die Durchführung der k-ten Iteration des GMRES-Verfahrens zur Lösung der Gleichung $Ax = b$ an.

b) Geben Sie die Anzahl der arithmetischen Operationen für die Durchführung der k-ten Iteration des CG-Verfahrens zur Lösung der Normalengleichung $A^T Ax = A^T b$ an.

Hinweis: Unter "arithmetische Operationen" sind hier Multiplikationen zu verstehen. Additionen können vernachlässigt werden. Es genügt, die asymptotische Ordnung anzugeben, d.h. es ist nach einem Ergebnis der Form $5n^{10} + k^5 + \mathcal{O}(kn^8)$ o.Ä. gefragt.

(2+2=4 Punkte)

Aufgabe 2. Es seien gegeben

$$A := \begin{pmatrix} 0 & & & & & 1 \\ 1 & 0 & & & & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & & \vdots \\ & 0 & \ddots & 0 & & \\ & & \ddots & 1 & 0 & \vdots \\ & & & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \text{und } x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

a) Zeigen Sie, dass das GMRES-Verfahren zur Lösung von $Ax = b$ die Vektoren $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} = 0$ liefert und erst $x_n = x^*$ gilt.

b) Wie verhält sich das CG-Verfahren angewendet auf die Normalengleichung $A^T Ax = A^T b$?

(3+2=5 Punkte)

Aufgabe 3. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch mit den Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Gilt $Ax - \lambda x = y$ für gewisse $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann folgt

$$\min_{k=1\ldots n} |\lambda - \lambda_k| \leq \frac{\|y\|_2}{\|x\|_2}.$$

(5 Punkte)

Aufgabe 4. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie Einschließungen für die Eigenwerte von A an. Ist A positiv definit?

b) Zeigen Sie, dass der kleinste Eigenwert von A höchstens 2 und der größte Eigenwert von A mindestens 4 ist.

c) Geben Sie möglichst genaue Abschätzungen für die Eigenwerte von B an. Skizzieren Sie dazu die Gerschgorin-Kreise für B und B^T und zeichnen Sie die exakten Eigenwerte ein.

(2+2+2 = 6 Punkte)

Programmieraufgabe 1. Bearbeiten Sie die im jupyter notebook bereitgestellte Programmieraufgabe III.

(20 Punkte)

Die Abgabe der Programmieraufgabe findet in der Woche vom 3. bis 7. Dezember in den CIP-Pools statt.