Einführung in die Grundlagen der Numerik

Wintersemester 2018/19
Prof. Dr. Ira Neitzel
Fabian Hoppe

UNIVERSITÄT BONN

Übungsblatt 9.

Abgabe am **13. Dezember vor der Vorlesung**.

Aufgabe 1. Bestimmen Sie mit Hilfe von Givens-Rotationen die QR-Zerlegung der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

und berechnen Sie anschließend das Produkt RQ.

Zur Erinnerung: Eine Givens-Rotation ist gegeben durch eine Matrix der Form

$$G_{ij}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & c & \cdots & s & & & \\ & & & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ & & & -s & \cdots & c & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix},$$

vgl. die Notizen der Vorlesung zum Thema QR-Zerlegung. Um durch Multiplikation (von links) mit $G_{i,i+1}(\theta)$ den Eintrag an der Stelle $(i+1,i)$ in einer Matrix A auf 0 zu setzen, kann man

$$c = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad s = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \text{mit } a = a_{i,i}, b = a_{i+1,i}$$

wählen.

(5 Punkte)

Aufgabe 2. Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ gegeben und

$$B := \begin{pmatrix} 0 & A^T \\ A & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m)\times(n+m)}.$$

Geben Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von B mit Hilfe der Singulärwertzerlegung von A an.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und λ ein einfacher Eigenwert von A mit zugehörigem normiertem (Rechts-)Eigenvektor $v \in \mathbb{R}^n$, d.h.

$$Av = \lambda v, \qquad \|v\|_2 = 1,$$

Zusätzlich sei nun $u \in \mathbb{R}^n$ ein normierter Links-Eigenvektor, d.h.

$$u^T A = \lambda u^T, \qquad \|u\|_2 = 1.$$

Mit Hilfe der Jordan-Normalform lässt sich zeigen, dass $u^T v \neq 0$ gilt, was in dieser Aufgabe nicht gezeigt werden muss.
Für $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig und $\epsilon \in \mathbb{R}$ definieren wir $A(\epsilon) := A + \epsilon C$.

a) Man zeige, dass es $\epsilon_0 > 0$ gibt, derart, dass die Matrix $A(\epsilon)$ für alle ϵ mit $|\epsilon| < \epsilon_0$ einen einfachen Eigenwert $\Lambda(\epsilon)$ besitzt, sodass $\Lambda : (-\epsilon_0, \epsilon_0) \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist und

$$\Lambda'(0) = \frac{u^T C v}{u^T v}.$$

erfüllt. Können Sie eine ähnliche Formel für den zu $\Lambda(\epsilon)$ gehörigen normierten Eigenvektor von $A(\epsilon)$ angeben?

Hinweis: Satz über implizite Funktionen.

b) Interpretieren Sie Ihr Ergebnis aus Teilaufgabe a) für den Fall, dass A symmetrisch ist.

(4+2 Punkte)

Aufgabe 4. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gegeben, derart, dass A durch $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in ihre Jordan-Normalform $J = TAT^{-1}$ überführt wird.
Sei $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_2 = 2$ und $\tilde{\lambda} \in \mathbb{R}$. Man zeige, dass dann ein Eigenwert λ von A existiert, derart, dass

$$\frac{|\lambda - \tilde{\lambda}|^\ell}{1 + |\lambda - \tilde{\lambda}| + \ldots + |\lambda - \tilde{\lambda}|^{\ell-1}} \leq \operatorname{cond}_2(T)\|Ax - \tilde{\lambda}x\|_2$$

gilt, wobei ℓ der Index des Eigenwerts λ (= maximale Länge eines zugehörigen Jordan-Blocks in der Jordan-Normalform) ist.

Hinweis: Verfahren Sie ähnlich wie in Aufgabe 3 auf Übungsblatt 7. Machen Sie sich klar, dass die Operatornorm einer quadratischen Blockdiagonalmatrix als das Maximum der Operatornormen der jeweiligen Blöcke bestimmt werden kann.

(5 Punkte)

Programmieraufgabe 1. Bearbeiten Sie die im jupyter notebook bereitgestellte Programmieraufgabe IV.

(20 Punkte)

Die Abgabe der Programmieraufgabe findet in der Woche vom 17. bis 21. Dezember in den CIP-Pools statt.