THEMENAUSWAHL: SEMINAR FÜR HÖHERE MATHEMATIK (WINTERSEMESTER 2018/19)

MICHAEL FEISCHL

Zu allen Vorträgen soll ein Handout (unter 3 Seiten) erstellt werden, in dem die wichtigsten Ergebnisse zusammengefasst und auf die relevante Literatur verwiesen wird.

1) Norm, Metrik, Topologie: Der Vortrag soll die verschiedenen Stufen der Abstraktion des Abstandsbegriffs in der Mathematik darstellen. Beginnend mit einfachen Beispielen für Normen in 1D, 2D, und 3D sollen Normäquivalenzen, Matrixnormen (insbesondere die Spektral- und die Frobeniusnorm sowie allgemeine Operatornormen) usw. besprochen werden. Des weiteren sollen Beispiele für Metriken gezeigt werden, welche keine Normen sind und grundlegende Eigenschaften definiert und bewiesen werden. Schlussendlich sollen ganz allgemein topologische Räume besprochen werden. (Literatur [1, 2])

2) Stetigkeit, Grenzwert und Ableitung: Dieser Vortrag soll die aus der Schule bekannte Definition von Grenzwert und Stetigkeit mit den mathematischen Konzepten dahinter verbinden. Der Zusammenhang zwischen Folgenstetigkeit und der Definition von Stetigkeit über das Urbild sollen verglichen und die natürliche Verbindung zu topologischen Räumen besprochen werden. Zeigen Sie Beispiele von Funktionen, welche in der naiven Vorstellung nicht stetig sind, im mathematischen Sinn aber doch. Die Definition der Ableitung über Grenzwerte soll mit der geometrischen Definition über die Tangente verglichen werden. (Literatur [1, 2])

3) Matrixfaktorisierung: Es sollen verschiedene Methoden zum Faktorisieren von Matrizen vorgestellt werden. Ganz allgemein soll die Bedeutung von Basistransformationen in Vektorräumen für Matrizen dargestellt werden. Möglichkeiten sind: LU-Zerlegung, QR-Zerlegung, Singulärwertzerlegung, Jordanform, Schurzerlegung, ... Für die präsentierten Beispiele sollen grundlegende Eigenschaften wie Existenz der Zerlegung, Beschränktheit der Faktoren, usw. und auch Gegenbeispiele gezeigt, sowie Anwendungen präsentiert werden. Außerdem soll zumindest ein numerischer Algorithmus zur Berechnung einer Zerlegung vorgestellt werden. (Literatur [3, 4])

4) Iteratives Lösen großer Gleichungssysteme: Der Vortrag soll iterative Methoden zum Lösen von Gleichungssystemen näher bringen. Besprechen Sie verschiedene Verfahren wie etwa: Jacobi-Iteration, Gauss-Seidel Iteration, Arnoldi- und Lanczos-Iteration. Zu den gezeigten Beispielen sollen Konvergenzkriterien und Raten hergeleitet werden. Außerdem soll kurz das Konzept eines Projektionsverfahrens dargestellt werden. Vergleichen Sie Vor- und Nachteile der iterativen Löser mit direkten Verfahren (Gausselimination) und geben Sie Beispiele. (Literatur [3])

5) Krylov Unterraumverfahren am Beispiel von CG: Stellen Sie die Grundlagen von Krylov Unterraumverfahren vor und betrachten Sie insbesondere das CG Verfahren. (Literatur [3, 4])

6) Quadratur: Die Einleitung soll Fragen wie *Warum benötigen wir numerische Quadratur?* und *Welchen fundamentalen Grenzen unterliegt numerische Quadratur?* beantworten. Beweisen Sie dann grundlegende Eigenschaften von Quadraturformeln (maximale Exaktheit, Linearität) und besprechen Sie dann die Gauss-Quadratur. (Literatur [4])

7) Beweis von Chebyshev's Primzahlsatz: Die sogenannte schwache Form des Primzahlsatzes lässt sich mit elementaren Methoden beweisen. Präsentieren Sie den Beweis verständlich und formulieren Sie eine Einleitung, die grundlegende Eigenschaften von Primzahlen vorstellt. (Literatur [6])

8) Fixpunktsatz von Banach und Anwendungen: Der Vortrag soll den Satz und seinen Beweis darstellen, Gegenbeispiele zur Abschwächung der Voraussetzungen liefern und Anwendungen im Beweis des Satzes über implizite Funktionen oder des Satzes von Picard-Lindelöf zeigen. (Literatur [1, 2])

9) Einführung in die projektive Geometrie: Arbeiten Sie das Skript [5] durch und geben Sie eine verständliche Einführung in die projektive Geometrie. Schließen Sie den Vortrag mit einigen Anwendungen.

10) Das Newtonverfahren: Stellen Sie das Newtonverfahren zur Nullstellensuche vor und geben Sie einen Konvergenzbeweis. Dazu beginnen Sie mit der Taylorformel und Restglieddarstellungen. Ergänzen Sie die Definitionen und Beweise mit einfachen Beispielen. (Literatur [4, 3])

11) Zahldarstellung am Computer: Erklären Sie *floating point* Arithmetik am Beispiel gängiger Systeme we `double`. Sprechen Sie über darstellbare Zahlenintervalle sowie Rundungsfehler. Der Begriff der Kondition sollte erklärt und das Konzept der Vorwärtsfehleranalyse dargestellt werden. (Literatur [4]). Wenn Zeit bleibt, kann auch über *fast inverse square root* gesprochen werden.

References

[1] Analysis II: Koenigsberger, Hildebrandt, Forster
[2] W. Rudin, Functional analysis, McGraw-Hill Science/Engineering/Math, 1991.
[3] Numerische Mathematik: Deuflhard/Hohmann, Youssef Saad "Iterative Methods for Sparse Linear Systems"
[4] D. Praetorius, Numerik Skript, TU Wien (oder ähnliche Skripten, Unterlagen Ihrer Wahl).
[5] L. Halbeisen, N. Hungerbühler, Einführung in die projektive Geometrie, ETH Zürich.
[6] G. H. Hardy, E. M. Wright, An introduction to the theory of numbers, Sixth edition. Oxford University Press, Oxford, 2008.

E-mail address: `michael.feischl@uni-bonn.de`

Endenicher Allee 19b, Raum 3.032