Algorithmische Mathematik I

Wintersemester 19/20
Prof. Dr. J. Gedicke
Johannes Rentrop und Jannik Schürg

UNIVERSITÄT BONN

Übungsblatt 0.

Abgabedatum: **keine Abgabe**

Aufgabe 1. (Dreiecksungleichung)

a) Es seien $x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$|x + y| \leq |x| + |y| \,.$$

b) Seien nun $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Nutzen Sie a), um zu zeigen:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} x_i \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \,.$$

Aufgabe 2. (Geometrische Reihe)

a) Beweisen Sie folgende Formel für die n-te Partialsumme der *geometrischen Reihe*:

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \quad , \quad n \in \mathbb{N}\,,\ q \in \mathbb{R}\,,\ q \neq 1\,.$$

b) Leiten Sie daraus für $0 < q < 1$, $m > n$ die folgende Abschätzung für den „Zuwachs“ ab:

$$S_m - S_n = \sum_{k=n+1}^{m} q^k \leq \frac{q^{n+1}}{1 - q}\,.$$

Aufgabe 3. (Kombinatorik)

Es seien $m, n \in \mathbb{N}$. Damit definieren wir die Mengen $A := \{1, \ldots, m\}$ und $B := \{1, \ldots, n\}$. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von m und n die Zahl der

a) Abbildungen von A nach B.

b) injektiven Abbildungen von A nach B.

c) bijektiven Abbildungen von A nach B.

Aufgabe 4. (Potenzmenge)

Die Potenzmenge einer Menge A bezeichnet die Menge aller Teilmengen von A. Wir schreiben $\mathcal{P}(A)$ oder 2^A. Weiterhin bezeichnen wir mit $|A|$ die Kardinalität von A, welche im Falle einer endlichen Menge der Anzahl an Elementen entspricht. Sei nun A endlich und $|A| = n$. Beweisen Sie mithilfe vollständiger Induktion, dass

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^n\,.$$

Aufgabe 5. (Modulo-Operator)

a) Seien $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $m \geq n$. Zeigen Sie, dass eindeutige natürliche Zahlen $q, r \in \mathbb{N}_0$ existieren mit $m = q\,n + r$ und $r < n$.

b) Seien m, n und r wie in a). Die *Modulo-Operation* oder *Division mit Rest* zwischen m und n berechnet den Rest r. Man schreibt $m \bmod n = r$ oder $m \equiv r \mod n$. Folgern Sie, dass $m \equiv 0 \mod n$ genau dann gilt, wenn n Teiler von m ist.

Hinweis: Der Help Desk für die Algorithmische Mathematik I findet an folgenden Terminen statt:

- Di/Do 10-13, Raum N1.002
- Mo 12-14, Mi 14-16, jeweils Raum N0.007 und Do 14-16, Raum N.008 (Lehramt)