Übungsblatt 11.

Abgabedatum: **13.01.2020**

Aufgabe 1. (LR-Zerlegung)

Sei

$$A := \begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 3 \\ -5 & -5 & -4 & 4 \\ 0 & 5 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie eine LR-Zerlegung von A und geben Sie L, R und P an.

b) Zeigen Sie, dass $P^{-1} = P^\top$ und $\det P = \pm 1$ für P, wie sie von der LR-Zerlegung berechnet werden.

c) Berechnen Sie die Lösung von $Ax = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^\top$ mit Hilfe von L, R und P.

(2+2+2 Punkte)

Aufgabe 2. (Cholesky-Zerlegung)

Sei

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 6 & -6 & -4 \\ 6 & 10 & -14 & -2 \\ -6 & -14 & 83 & -7 \\ -4 & -2 & -7 & 22 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Matrix A positiv-definit ist.

b) Berechnen Sie die Cholesky-Zerlegung der Matrix A. Berechnen Sie die Lösung von $Ax = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}^\top$ mit Hilfe von L.

c) Zeigen Sie, dass eine Matrix genau dann symmetrisch und positiv-definit ist, wenn deren Cholesky-Zerlegung existiert.

d) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und L ihr Cholesky-Faktor. Zeigen Sie, dass $\frac{1}{2}\log\det(A) = \sum_{i=1}^{n} \log L_{ii}$.

(1+2+3+2 Punkte)

Aufgabe 3. (Matrix-Normen)

a) Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_\infty \colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}, \\ v &\mapsto \max_{i=1,\dots,n} |v_i| \end{aligned}$$

eine Vektor-Norm ist.

b) Zeigen Sie, dass für die von $\|\cdot\|_\infty$ induzierte Matrix-Norm gilt

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1} |A_{ij}|.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst „$\leq$“ und dann, dass der Wert angenommen wird.

c) Zeigen Sie, dass $A \mapsto \sqrt{\mathrm{Tr}[AA^\top]}$ eine Matrix-Norm definiert.

Hinweis: Mit Tr ist die Spur gemeint, also $\mathrm{Tr}[X] = \sum_i X_{ii}$.

d) Skizzieren Sie die Einheitskugeln $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\}$ für die Normen $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$.

e) *(Bonus)* Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Zeigen Sie, dass es für alle Paare von Vekorraum-Normen $\|\cdot\|_a$ und $\|\cdot\|_b$ jeweils Konstanten c und C gibt mit

$$c\|v\|_a \leq \|v\|_b \leq C\|v\|_a$$

für alle $v \in V$.

(1+2+2+1+3* Punkte)