Einführung in die Grundlagen der Numerik

Institut für Numerische Simulation
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

Wintersemester 2014/2015

Normierter Vektorraum

Sei X ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Dann heißt die Abbildung $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ Norm auf X, falls für alle $x, y \in X$ und alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

- $\|x\| = 0 \leftrightarrow x = 0$
- $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ (Homogenität)
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Dreiecks-Ungleichung)

Hieraus folgen die weiteren Eigenschaften

- $\|x\| > 0$ für alle $x \neq 0$
- $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x + y\|$

Falls für alle $x, y \neq 0 \in X$ für die $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ gilt, folgt dass $g = \lambda f$, so heißt X streng normiert bzw. $\|\cdot\|$ eine strenge Norm.

Vollständigkeit

Cauchyfolge

Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Cauchyfolge, falls gilt

$$\forall\epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m, n > N \quad \|u_m - u_n\| < \epsilon$$

Vollständigkeit

Ein normierter Vektorraum $(X, \|\cdot\|)$ heißt vollständig, falls jede Cauchyfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X (gegen ein $x_\star \in X$) konvergiert.

Best-Approximation

Proximum

Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum, $T \subset V$ eine beliebige Teilmenge. Zu einem beliebigen Element $v \in V$ bezeichnet man ein Element $t \in T$ als beste Näherung oder Proximum zu v, falls für jedes Element $s \in T$ gilt

$$\|v - t\| \leq \|v - s\|$$

Die Existenz eines solchen t ist nicht selbstverständlich!

Approximation in normierten Vektorräumen

Ist $U \subset V$ ein endlich-dimensionaler linearer Unterraum des normierten Vektorraums V, dann existiert zu jedem Element $v \in V$ ein Proximum $u \in U$.
Ist V streng normiert, dann ist das Proximum $u \in U$ in einem beliebigen endlich-dimensionalen Unterraum an ein beliebiges $v \in V$ eindeutig bestimmt.

Innenprodukt/Skalarprodukt & Orthogonalität

Eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ über einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V heißt Innenprodukt oder Skalarprodukt auf V, falls für alle $f, g \in V$ und alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt

- $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$ (Symmetrie)
- $\langle \alpha f + \beta g, h \rangle = \alpha \langle f, h \rangle + \beta \langle g, h \rangle$ (Linearität)
- $\langle f, f \rangle > 0$ für alle $f \neq 0$ (Definitheit)

Eine Abbildung die nur die ersten beiden Bedingungen erfüllt heißt symmetrische Bilinearform.

Orthogonalität

Zwei Elemente $f \neq 0$ und $g \neq 0$ heißen orthogonal zueinander, falls gilt $\langle f, g \rangle = 0$.

Induzierte Norm

Ein Innenprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ induziert eine Norm $\|\|$ auf V vermöge

$$\|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle}$$

Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

Für ein Innenprodukt gilt die Ungleichung

$$\langle f, g\rangle^2 \leq \langle f, f\rangle \cdot \langle g, g\rangle$$

Sei $g \neq 0$, dann gilt für alle $\alpha \in \mathbb{R}$

$$0 \leq \langle f - \alpha g, f - \alpha g\rangle = \langle f, f\rangle - 2\alpha\langle f, g\rangle + \alpha^2\langle g, g\rangle$$

Wählt man nun $\alpha = \frac{\langle f,g\rangle}{\langle g,g\rangle}$ erhält man

$$0 \leq \langle f, f\rangle - \frac{\langle f, g\rangle^2}{\langle g, g\rangle}$$

Räume

Banachraum

Ein vollständiger normierter Vektorraum heißt Banachraum.

Prä-Hilbertraum

Ein Vektorraum mit Innenprodukt heißt Prä-Hilbertraum.

Hilbertraum

Ein Vektorraum mit Innenprodukt, der vollständig ist, heißt Hilbertraum.

Best-Approximation in Prä-Hilberträumen

Charakterisierungssatz

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Prä-Hilbertraum mit der induzierten Norm und U ein endlich-dimensionaler Unterraum. Dann ist $u \in U$ genau dann das eindeutige Proximum an $v \in V$, wenn für alle $w \in U$ gilt

$$\langle v - u, w\rangle = 0$$

Sei $\langle v - u, w\rangle = 0$ für alle $w \in U$. Betrachte $w = u + w' \in U$. Dann gilt

$$\|v - w\|^2 = \|v - u - w'\|^2 = \|v - u\|^2 + \|w'\|^2$$

Sei u das Proximum. Angenommen es gibt ein $w^\star \in U$, so dass $\langle v - u, w^\star\rangle = c \neq 0$. Betrachte $\hat{w} := u + c\frac{w^\star}{\|w^\star\|}$. Es gilt

$$\|v - \hat{w}\|^2 = \|v - u\|^2 - \frac{2c}{\|w^\star\|}\langle w^\star, v - u\rangle + \frac{c^2}{\|w^\star\|^2}$$

Und somit

$$\|v - \hat{w}\|^2 < \|v - u\|^2$$

Normalengleichung

Sei U aufgespannt durch die Basis $\{w_1, \ldots, w_N\}$, dann gilt für das Proximum $u = \sum_{i=1}^N \alpha_i w_i$ dass sein Koeffizientenvektor $\tilde{u} = (\alpha_i)$ die Normalengleichungen

$$\langle f - \sum_{i=1}^N \alpha_i w_i, w_j \rangle = 0 \quad \text{bzw.} \quad \sum_{i=1}^N \alpha_i \langle w_i, w_j \rangle = \langle v, w_j \rangle$$

für alle $j = 1, \ldots, N$ erfüllt.

Gramsche Matrix

Die Matrix

$$G := (G_{i,j})_{i,j=1}^N \quad \text{mit} \quad G_{i,j} := \langle w_i, w_j \rangle$$

heißt Gramsche Matrix zur Basis $\{w_1, \ldots, w_N\}$. Diese ist symmetrisch positiv definit.

Orthonormalbasis

Orthonormalbasis

Eine Basis $\{v_1, \dots, v_N\}$ des endlich-dimensionalen Unterraums $V_N \subset V$ heißt Orthogonalbasis, falls für alle $i = 1, \dots, N$ und alle $j \neq i$ gilt $\langle v_i, v_j \rangle = 0$. Gilt zudem $\|v_i\| = 1$ für alle $i = 1, \dots, N$ ist es eine Orthonormalbasis. Die Gramsche Matrix zu einer Orthonormalbasis ist die Identität.

Eigenschaften (Fourierkoeffizienten)

Sei $\{v_1, \dots, v_N\}$ eine Orthonormalbasis des endlich-dimensionalen Unterraums $V_N \subset V$.

1. Für alle $f \in V_N$ gilt die Entwicklungsformel $f = \sum_{i=1}^{N} \langle f, v_i \rangle v_i$.
2. Für alle $f \in V_N$ gilt der Satz von Pythagoras $\|f\| = \sum_{i=1}^{N} \langle f, v_i \rangle^2$.
3. Die Best-Approximation $f_N \in V_N$ zu beliebigem $f \in V$ ist gegeben durch $f_N = \sum_{i=1}^{N} \langle f, v_i \rangle v_i$.
4. Für alle $f \in V$ gilt die Besselsche Ungleichung $\sum_{i=1}^{N} \langle f, v_i \rangle \leq \|f\|^2$

Beweis

1. $f \in V_N$, daher $f = \sum_{i=1}^N \alpha_i v_i$. Somit gilt

$$\langle f, v_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^N \alpha_i v_i, v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^N \alpha_i \langle v_i, v_j \rangle = \alpha_j$$

2. Hieraus folgt auch mit $\|f\| = \langle f, f \rangle^2 = \left\langle \sum_{i=1}^N \alpha_i v_i, \sum_{j=1}^N \alpha_j v_j \right\rangle$

$$\|f\| = \sum_{i=1}^N \alpha_i \sum_{j=1}^N \alpha_j \langle v_i, v_j \rangle = \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 = \sum_{i=1}^N \langle f, v_i \rangle^2$$

3. Die Gramsche Matrix ist die Identität.
4. Es gilt offensichtlich

$$0 \leq \|f - \sum_{i=1}^N \langle f, v_i \rangle v_i\|^2 = \|f\|^2 - 2 \sum_{i=1}^N \langle f, v_i \rangle^2 + \sum_{i=1}^N \langle f, v_i \rangle^2$$

Gram-Schmidt-Verfahren

Der folgende Algorithmus berechnet zu den linear unabhängigen Vektoren $\{w_1, \dots, w_N\}$ ein Orthonormalsystem von N normierten, paarweise orthogonalen Vektoren, das denselben Untervektorraum erzeugt.
Die einzelnen Vektoren $\{v_1, \dots, v_N\}$ des Orthonormalsystems erhält man, indem zuerst jeweils ein orthogonaler Vektor berechnet und anschließend normalisiert wird:

$$
\begin{aligned}
v_1 &= \frac{w_1}{\|w_1\|} && \text{(Normalisieren des ersten Vektors } w_1\text{)}\\
v_2' &= w_2 - \langle w_2, v_1\rangle \cdot v_1 && \text{(Orthogonalisieren des zweiten Vektors } w_2\text{)}\\
v_2 &= \frac{v_2'}{\|v_2'\|} && \text{(Normalisieren des Vektors } v_2'\text{)}\\
v_3' &= w_3 - \langle w_3, v_1\rangle \cdot v_1 - \langle w_3, v_2\rangle \cdot v_2 && \text{(Orthogonalisieren des dritten Vektors } w_3\text{)}\\
v_3 &= \frac{v_3'}{\|v_3'\|} && \text{(Normalisieren des Vektors } v_3'\text{)}\\
&\vdots\\
v_N' &= w_N - \sum_{i=1}^{N-1} \langle w_N, v_i\rangle \cdot v_i && \text{(Orthogonalisieren des N-ten Vektors } w_N\text{)}\\
v_N &= \frac{v_N'}{\|v_N'\|} && \text{(Normalisieren des Vektors } v_N'\text{)}
\end{aligned}
$$

Hinweis

Orthogonalisierungsverfahren sind teuer!
Das Gram-Schmidt-Verfahren ist nicht robust gegen Rundungsfehler!